なめらかなラフパスと ラフパス理論の基本的問題*

原 啓介†(立命館大学・理工) kshara@se.ritsumei.ac.jp

目次

1 イントロダクション

この講演ではラフパス (rough path) の概念が滑らかな関数に対しても自明でない応用を持つこと、そして、ラフパス理論の比較的に「低レベルな」問題、つまり、理論構築の階層のより下部に属する問題をいくつか提起し、その部分的解答を与える。この予稿で説明される諸結果は、 T. Lyons (Oxford) との共同研究による ([1], [2])。

ラフパスは T. Lyons ([3]) によって提唱された概念で、通常は、局所的に激しく振動するようなレギュラリティの低い関数に対し、それによる「積分」や「微分方程式」などを適切に定義する枠組みを提供するために用いられることが多い。勿論、(我々、確率論研究者にとって) 最も重要な応用は、ブラウン運動のように経路空間とその上の測度を用いて定義される経路の (確率) 積分や (確率) 微分方程式

*予稿：日本数学会 2007 年度年会 (27–30 March 2007, 埼玉大) 統計数学分科会

†partialy supported by ACCESS Co. Ltd.

に対して異なる視点を提供し、時には、通常は確率論的設定から得ることが難しい、経路一本一本に対しての情報を引き出すことであろう。しかし、事実、ラフパス理論自体は経路のレギュラリティに全く依存せず定義され構築される一般的な理論であって、必ずしも、(局所的な) レギュラリティの問題を解決するためにのみ用いるものではない。この講演では、やや思いがけないことではあるが、全くなめらかな (実際、無限になめらかな) 関数に対しても、ラフパスの概念は自明でなく定義され、自明でない応用を持つことを示す。さらに、その中で現れてきた、ラフパス理論の基本的な問題についても論じる。

まずここで、「なめらかなラフパス」のアイデアを簡単に述べておく。連続関数の p 次変分の概念を思い出そう。$p \geq 1$ に対し、区間 I 上の連続関数 $F(t) : I \to \mathbf{R}^n$ の p 次変分 (ノルム) は、

$$\|F\|_{p-\mathrm{var,I}} = \left\{ \sup_{\mathcal{D}} \sum_{j=1}^{n} |F(t_{j+1}) - F(t_j)|^p \right\}^{1/p},$$

で定義されるのだった。ここで、“sup” は区間 I の全ての有限分割 $\{t_j\}$ に渡ってとる。通常、p 次変分を考えるのは、区間 I が有限の場合である。つまり、F がなめらかでない時にどれくらい激しく (局所的に) 振動しているかに興味がある。なぜならば、もし F がなめらかならば、差分 $|F(t_{j+1}) - F(t_j)|$ はその微分を用いて区間幅の定数倍で評価されてしまうので、自明に p 次変分は有限になるから。しかし、区間 I が実軸全体 $\mathbf{R}$ の時はどうだろうか？この場合は、たとえ F がなめらかであったとしても、差分 $|F(t_{j+1}) - F(t_j)|$ の和は無限大になり得る。よって、I が無限区間のとき、なめらかな関数の p 次変分がいつ有限の値を取るかは、自明な問題ではない。つまり、この場合、関数が大域的にどれくらい激しく変動しているか、を測ることになる。「なめらかなラフパス」の概念はこのアイデアを一般化したものである。つまり、単に F 自身 (そのパス自身) の p 次変分だけでなく、その重複積分についても調べる。ひとたび、対象の関数がラフパスであることが分かったならば、ラフパス理論の枠組みをそのまま適用して、それによる積分、あるいは、それによって駆動される微分方程式を研究することが可能になるだろう。

まとめれば、我々はなめらかなパスの大域的な振動を、重複積分らの変分まで調べることによって、より詳細に制御し、そのパスから派生する解析的オブジェクトの研究に応用しようとする。これが我々のアイデアである。

2　ラフパスとは

ここでラフパスの定義をするが、我々はなめらかな関数しか扱わないため、簡単化した定義のみを与える。区間 $I = [a, b]$ (a, b として無限大も許す) 上の連続関数 $F(t) : I \to \mathbf{R}^n$ の重複積分

$$F^i_{u,v} = \int_{u<t_1<\cdots<t_i<v} dF_{t_1} \otimes \cdots \otimes dF_{t_i}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

を考える。通常のラフパス理論では、この積分をいかに定義するか、と言うことが問題になるが、 F がなめらかな場合は通常の意味で考え、その重複積分の区間の足し算についてある代数的関係、言わゆる「Chen の等式」が満たされていることだけ、注意しておけばよい (Lyons-Qian [4])。

以下では、 $\mathbf{R}^n \otimes \cdots \otimes \mathbf{R}^n$ 上での各ノルムを、単に $|F^i_{u,v}|$ と書く。

ラフパスの定義を明解に行うため、以下の control function の定義が必要である。

定義 2.1 Δ_I を単体 $\{(u,v) : u \le v,\, u,v \in I\}$ とする。有界連続関数 $\omega(u,v) : \Delta_I \to [0,\infty)$ が *control function* であるとは、任意の $u \in I$ に対し $\omega(u,u) = 0$ であって、かつ超加法的、つまり、全ての $u \le v \le w\ (u,v,w \in I)$ について、

$$\omega(u,v) + \omega(v,w) \le \omega(u,w)$$

を満たすこと。

これを用いて、次のようにラフパスを定義する。

定義 2.2 $r \ge 1$ を実定数、その整数部分を $[r]$ と書くとき、 $F(t)$ が *(なめらかな)* $[r]$ 次のラフパス *(または単にラフパス)* であるとは、ある *control function* $\omega(u,v) : I \times I \to [0,\infty)$ があって、任意の $i = 1,\ldots,[r]$ と任意の $u \le v \in I$ について

$$|F^i_{u,v}| \le \omega(u,v)^{i/r} \tag{1}$$

が成立すること。

上の定義の第一レベルの評価、 $|F(v) - F(u)| \le \omega(u,v)^{1/r}$ が F の r 次変分有限を意味することに注意せよ。つまり、 control function の超加法性を用いて、

$$\sum_n |F(u_{n+1}) - F(u_n)|^r \le \sum_n \omega(u_n, u_{n+1}) \le \omega(a,b) < \infty.$$

上の定義では、 F 自身のみならず、この二次、三次、…の重複積分が同様の評価を持つこと、を要請している。実際、上のようにある次数までの評価が得られれば、Lyons [3] の第一定理が自動的に全ての次数での評価を保証し、対象の関数は数学的に良い構造を持って、「コントロール可能」になる。これがラフパス理論のストーリーである。

我々の問題はこの枠組みを利用するために、なめらかな関数がラフパスであるための良い条件を求めること。

3 なめらかなラフパス

まず、第一レベルのコントロール、つまり、任意の $(u,v) \in \Delta_{\mathbf{R}}$ とある $r \geq 1$ に対し、

$$|F(v) - F(u)|^r \leq \omega(u,v) < C < \infty$$

と評価できる条件を求めよう。

定理 3.1 $1 < p, q < \infty$ とする。なめらかな関数 F が $F \in L^p(\mathbf{R}^n)$ かつ $F' \in L^q(\mathbf{R}^n)$ を満たすならば、 $\Delta_{\mathbf{R}}$ 上の *control function* ω *on* が存在して、

$$r = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) + 1 \quad \text{について} \quad \left|\int_{s<u<t} dF(u)\right|^r \leq \omega(s,t)$$

となる。よって特に、 $\|F\|_{r-\mathrm{var}} < \infty$.

ゆえに、もし $r < 2$, つまり $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ ならば、 F は $[r]$ 次の (よって 1 次の) ラフパス。

次に第二以上のレベルの評価を得たい。しかし、 $1/p + 1/q < 1$ のとき、二次の重複積分 $\int\int_{s<u<v<t} dF_u dF_v$ に対する評価が得られないことが以下の簡単な例で分かる。特に $p = q > 2$ ととり、

$$H(t) = (H_1(t),\, H_2(t)) = (R(t)\cos t,\, R(t)\sin t)$$

のように関数 $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R^2}$ を定義する。ここで半径方向 $R(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を、 R と R' が L^p 関数であるが、 R が L^2 に入らないように取ることに可能である。このとき、簡単な計算によって、条件 $\|H\|_p + \|H'\|_p < \infty$ が満たされること、しかし、

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} (H_2 dH_1 - H_1 dH_2)\right| = \int_{-\infty}^{\infty} R(t)^2 dt = \infty.$$

のように面積が無限大に発散してしまうことが分かる。よって、どんな r に対しても、 r 変分は有限にならない。

以上より、残された可能性は $1/p + 1/q = 1$ の場合だけであり、高々、二次のラフパスのみしか期待できないことが分かる。実際、次の定理が得られる。

定理 3.2 $1/p + 1/q = 1$ かつ $p > 1$ とする。 $F(u) \in L^p(\mathbf{R}^n)$ かつ $F' \in L^q(\mathbf{R}^n)$ ならば、ある定数 C に対して、

$$\left|\int\int_{s<u<v<t} dF(u) \otimes dF(v)\right| \leq C\omega(s,t), \quad (-\infty \leq s < t \leq \infty)$$

が成立する。 ω は上の定理と同じもの。よって、 F は *2* 次のラフパス。

この証明は上の定理に比べてやや難しく、ユークリッド空間の幾何的性質を強く用いる必要がある。証明のアイデアについては、時間があれば講演の中で述べる。

4　応用

なめらかなラフパスは以下のように用いることができる。f を $\mathbf{R}$ 上の関数とし、$\hat{f}$ をそのフーリエ変換とする。このとき、

$$g(k) = \left(\widehat{\frac{f(x)}{x}}\right)[k],$$

と書けば、

$$g'(k) = c\hat{f}(k),$$

が成立することを思い出そう (c は定数)。今、関数 g とその微分 g' が、ある $p \geq 1$ に対して L^p に属しているならば、我々の定理より g は p 次変分有限である。よって、$g(R)$ は $R \to \infty$ のとき極限を持つ。

任意の二つの定数 $R' < R$ について、

$$g(R) - g(R') = \int_{R'}^{R} g'(u)du$$

だから、

$$\int_{R'}^{R} e^{ik0}\hat{f}(k)dk = \int_{R'}^{R} \hat{f}(k)dk$$

は $R \to \infty, R' \to -\infty$ のとき極限を持つ。よって、$x = 0$ において逆フーリエ変換が存在することが分かる。

特に $p = 2$ のときは、g と g' が L^2 関数であることと、f と $f(x)/x$ が L^2 関数であることは同値だから、逆フーリエ変換の各点収束のチェック可能な条件を得る。

我々の目標の一つは、このアイデアの非線形化である。$\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ が $\gamma + \gamma' \in L^2$ を満たすとして、$\mathbf{C}$ 内のリー代数 $\mathcal{G}$ とそのリー群 G を考える。このとき、

$$\Gamma = \overrightarrow{\exp} \int_{R'}^{R} d\gamma$$

(つまり、微分方程式 $(d/dR)\,\Gamma_{R,R'} = \gamma'_R$ の解) が定義できて、その $R \to \infty, R' \to -\infty$ での極限も存在する。よって、$f + f(x)/x \in L^2$ ならば、$\overrightarrow{\exp} \int_{R'}^{R} \hat{f}$ の極限が上と同様に存在する。

この例は簡単なモデルに過ぎないが、実際、これは非線形フーリエ変換の特別な場合と考えられる (T. Tao and C. Thiele [5])。詳しくは時間があれば講演の中で述べるが、ポイントは、我々のこの戦略で非線形フーリエ変換を適切に定義するためには、(古典的) フーリエ変換のより詳しい大域的挙動、具体的にはフーリエ変換型積分のラフパス性が必要になることである (次章問題集の「ラフパス性はいつ保存するか」も参照)。

5　問題集と部分的解答

5.1　ラフパス性はいつ保存するか

経路に対する変換があるとき、その変換が経路のラフパス性を保存するか、と言う問題は基本的と思われるが、今のところ自明なものしか知られていない。例えば、ラフパス研究に有効な性質として、ラフパスの時間変換不変性がある。ラフパス性は経路の空間的性質 (その形) だけによるものだから、いかなる time change $t \to \tau(t)$ に対しても、ラフパス性は保存する。このように経路の形をそのまま保存する変換は、自明にラフパス性を保存するし (例えば、空間の回転)、空間の変換でも時間変換に帰着される場合も保存する。しかし、本質的に経路の形を変えてしまう変換について、どのような変換がラフパス性を保つかは不明で、基本的かつ重要な問題と思われる。

例えば、$X(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}(\simeq \mathbf{R}^2)$ がラフパスであるとき、以下のフーリエ変換型の変換 (これは局所的な回転の積算)

$$T : X(t) \mapsto TX(t) = \int^t e^{its} dX(s),$$

をほどこした $TX(t)$ はラフパスだろうか？一般的にそうでないとすれば、いかなる条件を付加すれば良いか？ X がなめらかであると仮定しても、これに良い解答が与えられれば、非線形フーリエ変換の存在のための良い条件が得られる (よって、この問題は見かけより、ずっと難しいはず)。

5.2　第一定理を確率論的に拡張せよ

上のような問題へのアプローチとして考えられる方針の一つは、条件と主張を確率論的に弱めることだろう。つまり、適当な測度の下で「確率 1 で成立」と言う形にする。抜本的な方法として、そもそもラフパス理論自体を確率論的に変形することも考えられる。例えば、ラフパスを与える礎石である「第一定理」の主張をうまく確率論的に変形できれば、多くの応用がありうる (だろう)。以下の定理はその一つの試みで、条件も主張も両方、「確率 1 で成立」に弱めたものだが (したがって定理全体の主張が弱くなっているわけではない)、残念ながら $\theta = 1$ では示せていない。主張の強さがまだ不十分だろう。

定理 5.1 $X^{(n)}_{s,t}$ を各パス毎にラフパス理論の意味で *"multiplicative"* とし、以下のように期待値がある $\theta > 1$ と $[p] = n$ であるような p とに対して、 *control function* $\omega(s,t)$ で評価されるとする：

$$E\left[\left\|X^i_{s,t}\right\|^{p/i}\right] \le \omega(s,t)^\theta, \quad 1 \le i \le p. \tag{2}$$

このとき、 $m > n$ に対し $X^{(m)}_{s,t}$ を以下の評価を満たすように、 *multiplicative* に拡張できる。

$$E\left[\left\|X^i_{s,t}\right\|^{p/i}\right] \le C(i,p)\,\omega(s,t)^\theta, \quad i > p. \tag{3}$$

ここで $C(i,p)$ はある定数で、この拡張は $(a.s.)$ の意味で一意。

5.3 パス評価だけからラフパス性が得られるのはいつか

この問題も第一定理についてのものだが、やや重箱の隅をつつくの感のある話題かも知れない。ラフパスの定義によると、例えば二次のラフパスであるためには、二つの評価 (i) $|X(t)-X(s)| < \omega(s,t)^{1/2}$ と (ii) $\left|\int_s^t dX_u dX_v\right| < \omega(s,t)$, が任意の $s<t$ について成立することが要請される (そして、この二つと「第一定理」から、全ての次数についての評価が自動的に得られる)。しかし、 (1/2) と 1 と言う二つのパラメータの比は、長さと面積に対するものとして適切だから、条件 (i) だけから (ii) が得られても良さそうである。つまりパスについての評価 (i) だけから、自動的に全ての次数のラフパス評価が出てしまう場合があるのではなかろうか。つまり、ラフパス理論の多くが自明化する場合である。パスが無限次元の空間に値を取る場合には、 N. Victoir [6] によって、条件 (i) から (ii) が満たされない場合 (実際、面積が無限大になってしまう) が知られていたが、例えば、最も広い応用を持つユークリッド空間の場合はどうか。幸運なことに、以下の例が J. B. Garnett (UCLA) からの私信で指摘された。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} z^{2^n}.$$

ここで $z \in \mathbf{C}$ は $|z| = 1$ とする。この関数 f は有限な (1/2) 次リプシッツ・ノルムを持つが、ディリクレ・ノルム $\int_{|z|\le 1} |\nabla f|^2 dz$ は無限大である。これを翻訳すれば、 (i) だが (ii) でない例になっている。よって、ラフパス理論は有限次元でも自明でない。しかし、いかなる条件を付与すれば、ラフパス理論が自明化するかは面白い問題かも知れない。

5.4 離散ラフパス

なめらかな関数の p 次変分ノルムの有限性を問うことが意味があるのと全く同様に、無限時間 $t = 0, 1, 2, \cdots$ 上で考えれば離散時間パラメータの関数 (つまり数列) の p 次変分ノルムを考えることにも自明でない意味がある。例えば、離散マルチンゲールが (確率 1 で) 極限を持つだけでなく、 p 次変分も有限であるための条件は何か、と問うことが可能である。

p 次変分の有限性 (つまり一次のラフパス評価) だけでなく、二次以上のラフパス評価や、離散ラフパスの問題を考えることから、何か面白い問題が見つかるかも知れない。

参考文献

[1] Keisuke Hara and Terry Lyons. *Smooth rough paths and the applications to Fourier analysis*, preprint.

[2] Keisuke Hara and Terry Lyons. *Smooth rough paths and the applications*, Proceedings of 6th Ritsumeikan International Symposium on "Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance", World Scientific, to appear in 2007.

[3] Terry Lyons (1998). *Differential equations driven by rough signals*, Revista Matemática Iberoamericana, **14**, No. 2.

[4] Terry Lyons and Zhongmin Qian (2002). *System control and rough paths*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford.

[5] Terence Tao and Christoph Thiele. Nonlinear Fourier Analysis, *Proceedings of IAS Park City Mathematics Series*, to appear.

[6] Nicolas Victoir. *Levy area for the free Brownian motion: existence and non-existence*, Journal of Functional Analysis, **208** (2004) pp.107–121.