ラフパス理論入門 超特急コース
(Saint-Flour レクチャーノート序文訳)

訳と注釈: 原 啓介 (kshara@se.ritsumei.ac.jp)

26 Feb. 2008 (Ver: 1.0)

1 イントロダクションのイントロダクション

この文書は、Saint-Flour XXXIV-2004 における講義録 “Diffential Equations Driven by Rough Paths” (T.J.Lyons, M.J.Caruana, and T. Lévy, Lecture Note in Mathematics 1908, Springer) の序文を、原啓介が個人的な勉強のために翻訳したものです。この序文は原書でわずか 7 ページほどの短さながら、ラフパス理論の考え方と構造を簡潔明瞭に紹介しており、これからラフパス理論を学ぶ初学者および、ずいぶんとラフパス理論に時間とエネルギィを投資したけれども不幸にも回収できていない、私を含む多くの人々の役に立つものと信じます。

なお、原書の序文に含まれる、レクチャーの概要や謝辞などの部分は省略し、数学的内容に集中して翻訳しています。

もし間違いのご指摘やご意見などございましたら、お気軽に上のメイルアドレスまでご連絡下さい。

2 イントロダクション (つまり、この文書の本文)

ラフパス理論とは簡潔に述べれば、制御型微分方程式の古典理論の非線形な拡張である。それは確率微分方程式を決定論的に扱うのに十分にロバストで、また、半マルチンゲールよりもはるかにラフな入力信号によって駆動される制御型の微分方程式さえも扱うことができる。

まず最初に、制御型微分方程式とは何かを説明しよう。全てが微分可能な設定のもとでは、これは

$$\dot{Y}_t = F(\dot{X}_t, Y_t), \quad Y_0 = \xi \tag{1}$$

の形の微分方程式のことである。ここに、X は与えられた関数、ξ は初期条件、そして Y が未知の関数である。写像 F はその第一変数については線形であるようにとる。もし、F がその第一変数に依存しないならば、これは最も一般的な、時間について一様な一階微分方程式である。この関数 F はベクトル場であってもよく、その場合には Y は ξ を出発するこのベクトル場上の積分曲線となる。もし今、(1) 式の代わりに $\dot{Y}_t = F(t, X_t)$ を考えるならば、これは最も一般的な、時間に一様でない微分方程式である。この解 Y は時間に依存するベクトル場 F の積分曲線と言うことになるだろう。方程式 (1) は実際この種類のものであるが、特にこの時間非同質性が X のパス (道、経路) に陽に依存して決まるものであり、これが方程式を制御している、と言う。方程式 (1) の物理的意味は以下のようになる: 各時間において、Y はある複雑系 (例えば脳とか、自動車とか) の状態を記述していて、これはその内部状態と外部パラメータの無限小変化 (例えば、耳の側の空気圧や、ハンドルの角度など) の関数として時間発展する。

確率微分方程式も (1) の形をしているが、ただ違うのは X が通常の意味ではまるで微分可能でないことである。確率微分方程式理論ではしばしば方程式を、

$$dY_t = f(Y_t) dX_t, \quad Y_0 = \xi \tag{2}$$

という形で書いて、右辺の dX_t に関する線形依存性を強調する。K.Itô(伊藤清) は、強い解の概念を導入する中で、確率微分方程式を解くことがパス (経路、道) の空間の間の写像の構成になる、と言う事実を強調した。この理由から、(決定論的と見た) 方程式 (2) が一意な解を持つときも、この解を $Y = I_f(X, \xi)$ と書いて、I_f を f についての伊藤写像 (Itô map) と呼ぶ。

微分方程式の古典理論によれば、f がリプシッツ連続ならば X が全変動有界のとき一意な解を持ち、その解も全変動有界となる。しかも、伊藤写像 I_f は全変動有界なパスの空間の間の写像として連続になる[1]。これに対して、ラフパス理論の基本的結果は以下の二つの問題を解決するものである。

[1]Picard-Lindelöf の定理。

1. 少なくとも f が十分なレギュラリティを持つときに、その距離の下で伊藤写像 $X \mapsto I_f(X,\xi)$ が一様連続になるような、全変動有界なパスのなす空間上の距離の自然な族を同定すること。

2. これらの距離に関して、全変動有界なパスのなす空間の完備化を具体的に記述すること。

非常に濃縮した形で、この解答をここで与えておこう。もっとも単純な設定では、適切な距離は実パラメータ $p \in [1,\infty)$ に依存するもので、二つのパスが p-次変動 ($1/p$-ヘルダー・ノルムのパラメータ独立版) で近く、同じくそれらの始めの $\lfloor p \rfloor$ 次までの重複積分も近いこと、いわゆる p-次変動距離で近いことである。ある区間 $[0,T]$ 上で有界変動を持つパスの空間を、この p-次変動距離によって完備化した空間の元を、ラフパスと呼ぶ[2]。そして、これは $[0,T]$ の各部分区間 $[s,t]$ 上でのラフパスのふるまいを (少なくとも制御型微分方程式に関する限り) 効率的に要約した $\lfloor p \rfloor$-次テンソルたちで (その最初の要素は連続なパス x の増分 $x_t - x_x$ だが) 本質的に記述される。このテンソルの族はある代数的な関係と、$1/p$-次ヘルダー連続性に似た解析的な条件を満たさねばならない。

このノートの第 5 章で証明される定理は、適切な仮定の下で、ラフパスによって制御される微分方程式の解の存在と一意性を与えるものである。

制御 X が一次元の空間に値を取るときは、ラフパスの理論はある意味で自明なものになる、と言うことは注意しておく価値がある。実際、f が連続ならば、一様収束の位相に関して伊藤写像は連続になり、全ての連続な制御の空間に拡張される。すなわち、ラフパス理論は多次元の制御に対し深い意味を持つ。

ラフパスの定義に代数的側面と解析的側面が共存しているせいで、最初はこの理論の一般的描像を得ることがなかなか難しい。このノートの第一章と第二章ではそれぞれ分けて、ラフパスの主に解析的な部分、そして主に代数的な部分を説明する。

第一章では区間上のバナッハ空間値連続関数の p-次変動の概念を扱う。与えられたバナッハ空間 V と実数 $p \geq 1$ に対し、連続関数 $X : [0,T] \to V$ は

$$\sup_{\mathcal{D}} \sum_i \left| X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right|^p < +\infty$$

[2] ラフパス理論に怪しげなイメージを持っていた多くの人には、有界全変動を持つ関数の空間をあるノルムで完備化したもの、と言う関数解析的な説明が解毒剤になる。とは言え、ラフパス理論はそれだけのものではない。cf. geometoric rough path.

を満たすとき、有限 p-次変動を持つと言う。ここに、sup は区間 $[0,T]$ の全ての分割 $\mathcal{D}$ に渡ってとるものとする。この概念は、パラメータを取り直すことで X を $1/p$-次ヘルダー連続な関数にできることと同値である。

この章での中心的な結果は、Y が連続で X が全変動有界のとき定義される古典的なスチェルチェス積分 $\int_0^t Y_u dX_u$ が、X と Y がそれぞれ $p^{-1}+q^{-1}>1$ である p,q について有限な p-次と q-次変動を持つ場合に拡張できることである。この事実は 1930 年頃に Young によって発見されたのだが、これによって f が十分にレギュラーならば X が $p<2$ に対し p-次変動有限であるときにも方程式 (2) に意味を与え、かつ解くことができる[3]。

一方、X が $p\geq 2$ について有限の p-次変動を持つときは、一般にリーマン和 $\sum X_{t_i}(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$ がその分割のメッシュが 0 に行くときに収束しないため、もはや $\int_0^t X_u dX_u$ を定義することはできない。この $p=2$ の閾値はヤング積分のある種の弱点のせいだと思われるかも知れないが、これについては違う。単純かつ非常に具体的な例によって、有界変動を持つパス $X=(X_1,X_2):[0,T]\to\mathbf{R}^2$ に実数

$$\frac{1}{2}\int_0^T X_{1,u}dX_{2,u}-X_{2,u}dX_{1,u} \tag{3}$$

を対応させる写像が $p>2$ のとき p-次変動について連続でないことが分かる[4]。

上式 (3) で定義される数は単なる奇妙な反例ではない。第一に、これは曲線 X で囲まれた面積であるという自然な幾何的解釈を持つ。第二に、これを X によって制御される微分方程式、しかも非常にレギュラーな、実際、多項式的なベクトル場 f を持つ微分方程式の解の終端での値として書くことは難しくない。よって、多項式的なベクトル場を持つ場合ですら、$p>2$ なる p-次変動の意味で近い二つのパスに対し、制御方程式 (2) の応答が近いとは言えない。この事実は、$p>2$ について有限 p-次変動を持つ二つのパスは、その差が小さな全 p-次変動を持ち、かつそれらの決める面積が近いときのみ、互いに近いと宣言することが自然であるという最初のヒントになっている。

確率微分方程式がまさに丁度 $p=2$ の閾値上にあることは興味深い。実際、ほとんど確かにブラウン運動のパスの 2 次変動は無限大で、$p>2$

[3]Peano の定理。

[4]丁度、$p=2$ のときにも連続でないはずだが、私 (原) は反例の構成を知らない。ここで書かれているように、$p>2$ のときは易しい。

については p-次変動は有限である。確率積分についてのリーマン和の確率収束は、ヤング積分の観点からは、ブラウン運動に特有の確率的構造とそれによる巧妙なキャンセレーションから生まれる一種の奇跡的現象である[5]。

上式 (3) の量は X がブラウン運動であるとき確率積分として意味を持つ。つまり、言わゆる X のレヴィ面積である。ブラウン運動によって駆動される全ての確率微分方程式は、ひとたびこのブラウン運動のレヴィ面積のヴァージョンが選ばれれば、いっぺんに、つまり一つの零集合の外で、解くことができるだろうことは H. Föllmer によって予想されていた[6]。ラフパスの理論はこの予想に厳密な枠組みを与え、証明する。

第二章では、上式 (3) がバナッハ空間における有界全変動を持つパスに適切に付随した量の無限列の初項であるというアイデアを調べる。つまり、これらの量とはそのパスの重複積分である。V をバナッハ空間とし、$X : [0,T] \to V$ を全変動有界なパスとする。各整数 $n \geq 1$ と、$0 \geq s \geq t \geq T$ なる全ての (s,t) に対し、$[s,t]$ 上の X の n-次重複積分とは、

$$X^n_{s,t} = \int_{s<u_1<\cdots<u_n<t} dX_{u_1} \otimes \cdots \otimes dX_{u_n} \tag{4}$$

で定義された $V^{\otimes n}$ のテンソルである。V が $\mathbf{R}^2$ のときは、(3) 式は $X^2_{0,T}$ の反対称部に他ならない。

重複積分の重要性は幾何学者たち、特に K.T.Chen によって、ずっと以前から認識されていた。制御確率微分方程式の文脈では、この重要性は線形方程式の場合にもっとも強烈に現れる。線形方程式とは方程式 (2) で、ベクトル場 f が Y に線形に依存する場合である。制御 X が有界な全変動を持つときは、ピカールの逐次近似による方程式の解法によって、その解 Y の無限級数による表示

$$Y_t = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f^n X^n_{0,t} \right) Y_0 \tag{5}$$

が導かれる。ここに、f^n は f と n に依存する作用素で、そのノルムは n について高々幾何的なオーダーで成長する。X の重複積分 $X^n_{0,t}$ のノルムが $\frac{1}{n!}$ のように減少することをチェックすることは難しくない。かくし

[5]例えば、独立でない二つのブラウン運動 B, B' で $\int B dB'$ を定義してみようとすれば分かる。

[6]これにかなり近いことは多くの確率解析研究者が感じていたと思われる。少なくとも、レヴィ面積の項が悪さをする、と言う事実は知られていた。例えば、Ikeda-Watanabe の中の SDE の解の議論の中にも、そう読める箇所があるようだ。

て、級数 (5) は極めて急速に収束する。典型的な数値計算の応用では、十数項ほどで解の精密な近似を得るのに十分である。さらに好ましいのは以下の性質である。ひとたび、X の十数項の重複積分が計算機に保存されれば、すなわち、d を V の次元として d^{12} 程度のデータがあれば、X によって制御される線形微分方程式を、ほんのわずかの追加的な計算で、極めて正確に数値的に解くことができる。その数値誤差はベクトル場のノルムの単純な関数で上から評価することができる[7]。

かくして、区間 $[s,t]$ 上での X の重複積分たちは、それらが X で駆動される線形システムの応答を極めて正確に決定するという意味で、X の非常に効率的なデータである。実際、全変動有界で同じ出発点を持つ二つのパスが同じ重複積分らを持つことが、幾何的に何を意味しているのか、正確に理解することも可能である。すなわち、それらの差はツリー的パスである。この結果はこのノートで正確に述べるが、証明は与えない。

上の結果は満足のいくものである。つまり、重複積分たちの全体を一つのオブジェクトとして考えない限り、その本質的な何かを見逃すことになる。このオブジェクトをパスの「シグネチャ」と呼ぶ。もっと正確に (4) の記法を用いて述べれば、区間 $[s,t]$ 上の X のシグネチャとは、

$$S(X)_{s,t} = (1, X^1_{s,t}, X^2_{s,t}, \cdots) \tag{6}$$

で定義される $\mathbf{R} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots$ 内の無限列である。この無限列の空間 $\bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ を V の拡張テンソル代数と呼び、$T((V))$ と書く。これは実際、テンソル積によって導かれた積について代数になっている。この種の代数的構造に慣れていない読者は、以下の「辞書」を心にとめておくと良いだろう。V を有限次元 d を持つものとして、V の基底 $(v_1, \ldots, v_d)$ を選ぶ。このとき、$V = V^{\otimes 1}$ が変数 $X_1, \ldots, X_d$ の次数 1 の同次多項式の空間と同型であることは、自明な言い換えに過ぎない。各 $n \geq 0$ についても、$V^{\otimes n}$ は「非可換な」変数 $X_1, \ldots, X_d$ の次数 n の同次多項式の空間に同型であることになる。例えば、$d = 2$ であれば、$V^{\otimes 2}$ の基底は $(X_1^2, X_1X_2, X_2X_1, X_2^2)$ である。結局、$T((V))$ は d 個の非可換変数の全ての形式的冪級数の空間に同型で、これはベクトル空間であるばかりか、代数でもある。すなわち、テンソル積が非可換多項式の積に丁度対応している。

シグネチャの基本的な性質として、実数 (s,u,t) が $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$

[7]この不完全データ圧縮としてのラフパス理論の観点は大変に重要だと思われるが、見逃されがちである。Lions-Qian (Oxford Press) の冒頭に具体的な面白い例がある。

を満たすとき、

$$S(X)_{s,t} = S(X)_{s,u} \otimes S(X)_{u,t} \tag{7}$$

が成立する。この乗法的性質 (mutliplicativity) は、X の重複積分らの間の無限に多くの関係式をコード化しているにも関らず、非常に初等的な方法で証明することができる。しかしながら、以下の抽象的かつおおざっぱな議論の観点は、パスのシグネチャについての興味深い洞察を与えている。X が制御できる全ての微分方程式の中で最も重要で、ある意味で普遍的なものが、

$$dS_t = S_t \otimes dX_t, \quad S_0 = 1, \quad S : [0, T] \to T((V)) \tag{8}$$

である。この方程式 (8) の解が X のシグネチャ、$S_t = S(X)_{0,t}$ に他ならない。これは、パスのシグネチャをそのパスの非可換指数関数のようなものだと考えるべきであることを示唆している。しかも方程式 (8) を用いて、同じ初期条件を持つ同じ微分方程式を満たすことから、(7) 式の両辺が等しいことも導ける。

第三章では (7) 式を満たす $T((V))$ の要素 $(S_{s,t})_{0\le s\le t\le T}$ の集まりに焦点をあてる。このような集まりのことを「乗法的汎関数 (multiplicative functional)」と呼び、ラフパスの理論のポイントは、これらを微分方程式を駆動する基本的なオブジェクトとして見ることにある。ラフパスとは、p-次変動に関係したレギュラリティを満たす乗法的汎関数である[8]。

乗法的性質のように、レギュラリティの性質もパスのシグネチャの研究に啓発されている。パス X が全変動有界ならば、$X^1_{s,t} = X_t - X_s \sim |t-s|$ であり、$X^n_{s,t}$ は $|t-s|^n$ のオーダーになる。もし、X がある $p \in (1, 2)$ に対して有限の p-次変動を持つならば、その重複積分をヤング積分の意味で定義することがまだ可能であり、$X^n_{s,t}$ が $|t-s|^{\frac{n}{p}}$ のオーダーであると期待できる。

$0 \le s \le t \le T$ を満たす実数のペア (s, t) の集合を $\triangle_T$ と書くと、V の次数 n の乗法的汎関数は連続な写像 $X : \triangle_T \to T^{(n)}(V) = \bigoplus_{i=0}^n V^{\otimes i}$ である。かくして各 $(s, t) \in \triangle_T$ に対し、$X_{s,t}$ は $n+1$ テンソルの集まり $(1, X^2_{s,t}, \ldots, X^n_{s,t})$ となる。$p \ge 1$ をある実数とする。乗法的汎関数 X が

[8]初学者は大抵、ラフパスは全変動有界でないのに、ラフパスを定義しているらしい重複積分たちをそもそもどう定義しているのか、と言う疑問を抱く。実際は重複積分らの列全体を抽象化したもの、つまり乗法的性質をメソッドとして持つ乗法的汎関数と言うオブジェクトで、ラフパスを定義するのである。

有限な p-次変動を持つ、とは、

$$\sup_{0\leq i\leq n}\sup_{\mathcal{D}}\sum_k \left|X^i_{t_k,t_{k+1}}\right|^{\frac{p}{i}} < +\infty \tag{9}$$

を満たすこととする。ラフパス理論の最初の基本定理は、乗法的性質 (7) と p-次変動有限性 (9) の間の深い結びつきを表すものである。つまり、有限 p-次変動を持つ乗法的汎関数はレベル $\lfloor p\rfloor$ までで打ち切ったもので決定される。正確に述べれば、もし X と Y が有限 p-次変動を持つ次数 $n\geq\lfloor p\rfloor$ の乗法的汎関数で、全ての $(s,t)\in\triangle_T$ と $i=0,\dots,p$ に対して $X^i_{s,t}=Y^i_{s,t}$ ならば、$X=Y$ である。逆に、$\lfloor p\rfloor\leq m$ ならば、有限 p-次変動を持つ次数 m の任意の乗法的汎関数は、有限 p-次変動を持つ任意に高次の乗法的汎関数に一意に拡張できる。

このとき p-次ラフパスは、有限 p-次変動と次数 $\lfloor p\rfloor$ を持つ乗法的汎関数として定義される。

第四章と第五章では、ラフパスによって駆動される微分方程式に意味を与え、理論の主定理を与える。P. Malliavin によって「普遍極限定理 (Universal Limit Theorem)」と名付けられたこの定理は、f が十分なめらかならば、X が p-次ラフパスのとき方程式 (2) が一意な解を持つことを主張する。このとき、解 Y もそれ自身 p-次ラフパスになる。

ラフパスに言及せずに述べられる普遍極限定理の部分を記して、このイントロダクションをしめくくることにしよう。つまり、伊藤写像が一様連続になるような有界変動のパスの空間の距離について述べる。$p\geq 1$ を選ぶ。有界変動を持つ二つのパス、X と $\tilde{X}$ を考えよう。全ての (s,t) と全ての $n\geq 0$ に対し、$X^n_{s,t}$ と $\tilde{X}^n_{s,t}$ をそれぞれ $[s,t]$ 上の重複積分とする。このとき、X と $\tilde{X}$ の間の p-次変動距離とは、

$$d_p(X,\tilde{X}) = \sup_{0\leq i\leq\lfloor p\rfloor}\sup_{\mathcal{D}}\left[\sum_k\left|X^i_{t_k,t_{k+1}}-\tilde{X}^i_{t_k,t_{k+1}}\right|^{\frac{p}{i}}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{10}$$

で定義されるものである。ここで、ベクトル場 f が $C^{\lfloor p\rfloor+\epsilon}$-級ならば、伊藤写像 I_f はこの距離 d_p に関して一様連続になるのである。

了。

translated and annotated by HARA, Keisuke (kshara@se.ritsumei.ac.jp)