

コンデンサーとモーターからなる系の放電

県立三条高等学校 笹川 民雄

1. はじめに

1F 程度の大容量のコンデンサーが簡単に入手できるようになり、授業でも豆電球などを接続し、コンデンサーの蓄える静電エネルギーの演示実験が手軽に行えるようになった。このコンデンサーに直流モーターをつないでみると、豆電球を接続した場合と比べ、モーターはかなり長時間にわたって回転を続け、コンデンサーの放電時間が長くなることが観察される。この現象はモーターが回路に入ったとき素子として示す性質、すなわち、電磁力による回転運動とそれにより生ずる誘導起電力について考察するのによい事例となっていることがわかったので、このことについての簡単な実験結果とその理論的考察を報告したい。

2. 実験

写真1のように、1Fのコンデンサーを乾電池2本(約3.0V)で充電した後、スイッチを切り換え、モーターを通して放電させる。このときモーターの回転の様子を注意深く観察すると、回転数が徐々に小さくなりながら、2分ほど回転を続けることがわかる。また、電流計の読みは、スイッチを切り換えた瞬間は100mA程度であるが、

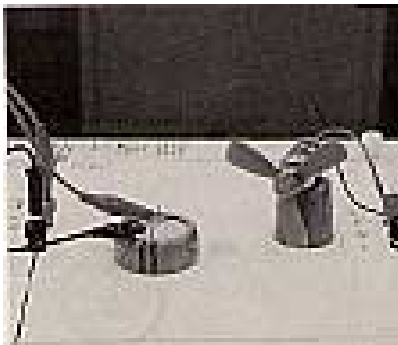


写真1 モーターとコンデンサー

すぐに30mAまで下がり、以後は回転が停止するまでこの一定値のままである。比較のため、モーターの軸の部分を指で押え、回転でさない状態で放電させると、電流は指数関数的に減少し、数秒で放電が終了する。

針の位置で値を読む従来の電圧計、電流計では時間的変化の様子がわかりにくいので、コンピュータ計測を行ってみた。コンデンサーの電圧をコンピュータ計測したものが、図1である。放電の結果、電圧は時間に比例して減少していることが読みとれる。容量が1Fのコンデンサーを使用しているため、 $Q = CV$ より、電気量も電圧と同じ値となり、時間に比例して減少することになる。電気量と時間のグラフの傾きの大きさが電流を与えるので、電流値が一定であることがわかる。

電流の時間的変化を直接計測したものが図2で、モーターが回転し始めた1.5秒くらいの間に、誘導起電力により電流は指数関数的に減少し、その後は一定の値をとり続けている。

発展的な実験として、モーターにプロペラを付けたり、指で軸で少し押えたりして、力学的な負荷をかける(摩擦力を大きくする)と電流の一定

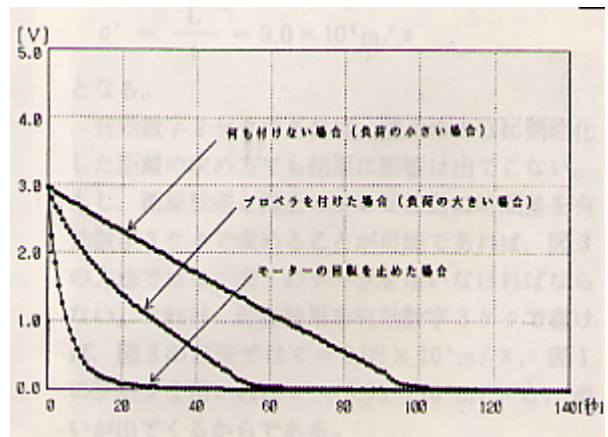


図1 電圧の時間変化(コンピュータ計測)

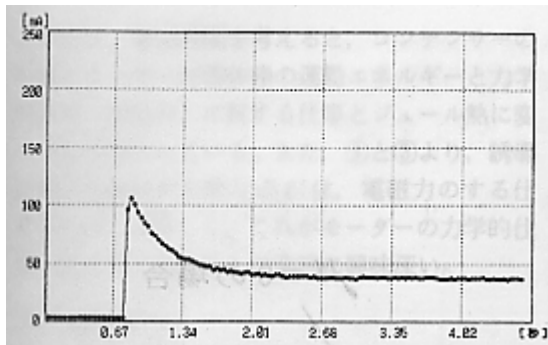


図2 電流の時間変化(コンピュータ計測)

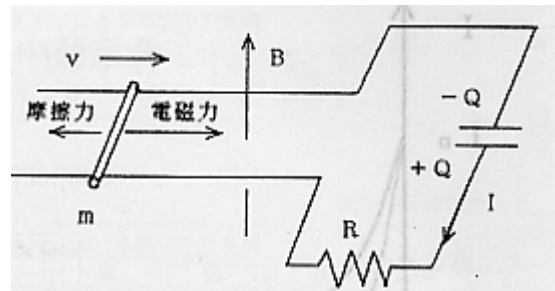


図3 線形モーターモデル

値が大きくなり、放電時間が短くなることがわかった。

3. 理論

実験で観察された事実を説明するために、回転するモーターの代わりに、導体棒と磁界からなる線形モーターをコンデンサーに接続した図3のような回路を考えた。ここで、導体棒の質量を m 、長さを L 、速度を v とし、磁束密度を B とする。さらに、導体棒にかかる力学的負荷(摩擦力)を $f = \mu mg$ 、回路の抵抗を R とすると、キルヒホッフの第2法則と電流と電荷の関係より、次の2式が成り立つ。

$$Q/C - vBL - RI = 0$$

$$I = -dQ/dt$$

また、導体棒についての運動方程式は、次のようになる。

$$LB - \mu mg = m \cdot dv/dt$$

を t で微分して、 I を代入し、 dQ/dt 、 dv/dt を消去すると

$$dI/dt = -(1/CR + B^2L^2/mR)I + \mu gBL/R$$

この微分方程式を初期条件、 $t=0$ で、 $I = Q/RC$ で解いて

$$I = (Q/RC - AT) \exp(-t/T) + AT$$

ここで、 $A = \mu gBL/R$ 、 $1/T = 1/CR + B^2L^2/mR$

をグラフにすると、図4のようになり、電流は時定数 T で減衰した後、一定値 $AT = \mu gBL$

$/ (1/C + B^2L^2/m)$ に近づくことがわかる。また、力学的負荷のパラメータ μ を大きくすると、電流の一定値 AT が大きくなる。これは実験事実と一致している。特に、力学的負荷のない場合、すなわち $\mu = 0$ の場合は電流は0になり、コンデンサーの電圧は、導体棒の誘電起電力によって完全に打ち消される。力学的負荷のないモーターは電気抵抗があっても、電源のエネルギーを消費しない素子であるといえる。

より Q を、より v を、それぞれ初期条件、 $t=0$ で、 $Q=Q_0$ 、 $v=0$ で解くと、次のようになる。また、図5、図6はそのグラフである。

$$Q = (Q_0 - AT) \exp(-t/T) - ATt + Q_0$$

$$v = BLT/m \cdot (I_0 - AT)(1 - \exp(-t/T)) - (\mu g - BL/m \cdot AT)t$$

容量が $1F$ の場合、電気量 Q は電圧と等しいので、より電圧は、減衰時間 T の後には時間 t に比例して減少することがわかる。これは図1の測定結果と一致している。また、より、 t の係数は $-(\mu g/C) / (1/C + B^2L^2/m)$ で負の値であるので、やはり、減衰時間 T の後には時間 t に比例して減少する。これはモーターの場合、回転数がだいに小さくなることに対応している。

次に、 I を掛け、 v を掛けて両式から vBI を消去すると、次のようなエネルギー保存の関係式が得られる。

$$-d(Q^2/2C)/dt = d(mv^2/2)/dt + \mu mgv + RI^2$$

この式は、単位時間を考えると、コンデンサーの静電エネルギーが導体棒の運動エネルギーと力

学的負荷（摩擦力）に抗する仕事とジュール熱に変わることを示している。また、 μ より、誘導起電力の供給する電力 vBL は、電磁力のする仕事率 LBv に等しく、これがモーターの力学的仕事の担い手であることは非常に興味深い。

4. おわりに

コンデンサーに接続された導体棒のモデルで実験で観察された事実、すなわち、放電時間が長くなること、電流が一定値を取ることで、電圧と回転数が時間に比例して減少することなどが説明できることがわかった。また、回路に入った場合のモーターの素子としての特徴、例えば、力学的負荷の小さいときは、モーターの回転による誘導起電力は電源電圧をほぼ打ち消し、力学的負荷によるエネルギーの消費を補うだけのわずかな電流しか流れないこと、力学的負荷が大きくなると、回転数が下がるとともに誘導起電力が小さくなり、電流が増加して回転力（電磁力）が大きくなり、エネルギーの消費が増すことが理論的に確認された。特に、力学的負荷のない場合、電源電圧は、モーターの回転による誘導起電力によって完全に打ち消され、電流は0となり、電気抵抗があってもエネルギーの消費がなくなることは、素子としての興味深い特徴である。

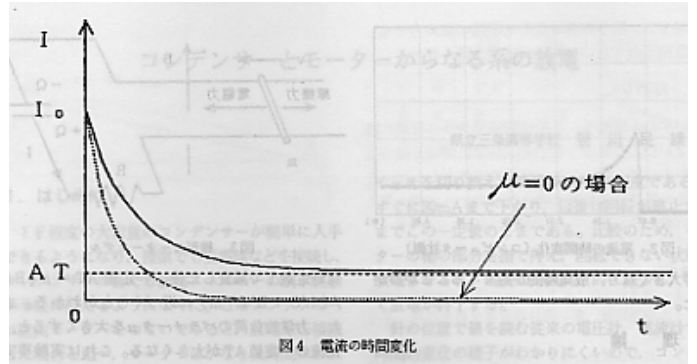


図4 電流の時間変化

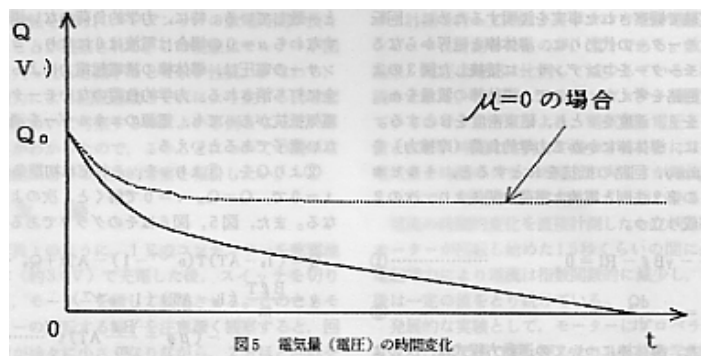


図5 電気量（電圧）の時間変化

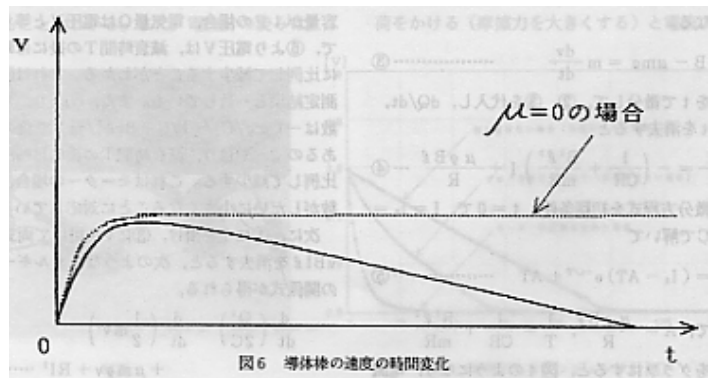


図6 導体棒の速度の時間変化