

水面の形と地球の形

三条高等学校 笹川民雄

§ 0 はじめに

理科1の地学分野を教えていると、今まで気付かなかつたいろいろな話題にぶつかり、興味、関心を引き起こさせられる場合がよくあるが、その中で今回は回転する流体の表面の形を求める方法を一般化して、地球の自転による変形と月や太陽の潮汐力による海面の変形を考察してみた。

§ 1 回転する流体の表面の形

これは初歩的な問題で、表面の形は放物面になることはよく知られているが、これからの問題の定式化の基礎となるのでここで触れさせてもらう。基本となる流体の方程式は

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{f}$$

である。ここで、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 \vec{f} は単位体積に働く力である。以後は定常状態にある力のつり合いのとれた流体を扱うので、時間微分を0として、次のようになる。

$$0 = -\nabla p + \vec{f}$$

さて図のように、角速度 ω で回転する流体を考える。流体とともに回転する系では単位体積に働く重力、遠心力、圧力勾配がつり合っている。そこで (r, ϕ, z) は円柱座標の基本ベクトル $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ を用いて

$$\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = -\rho g \vec{e}_z + \rho r \omega^2 \vec{e}_r$$

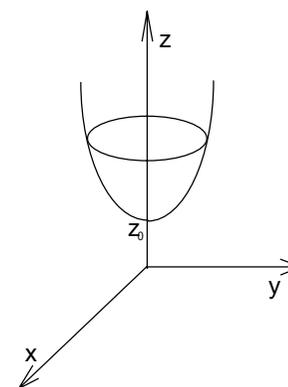
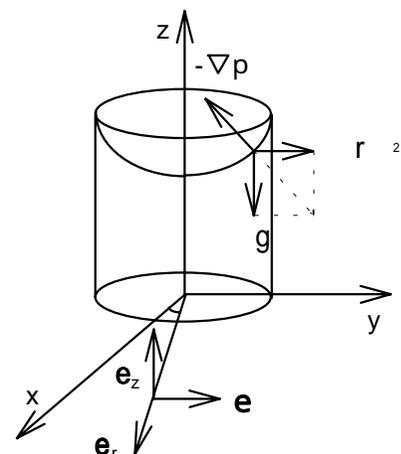
となる。(ここで対称性から $\partial p / \partial \phi = 0$ とした。)

の両辺の \vec{e}_r と \vec{e}_z の係数を比較すると次の式が得られる。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2$$

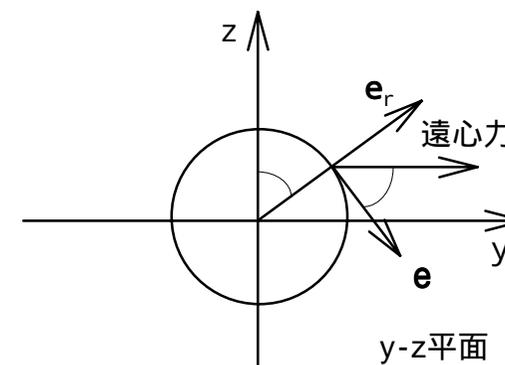
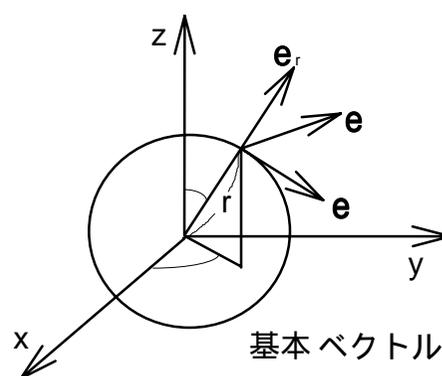
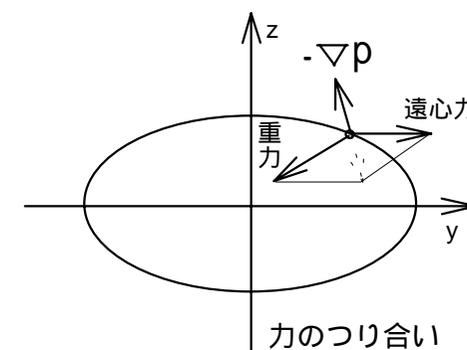
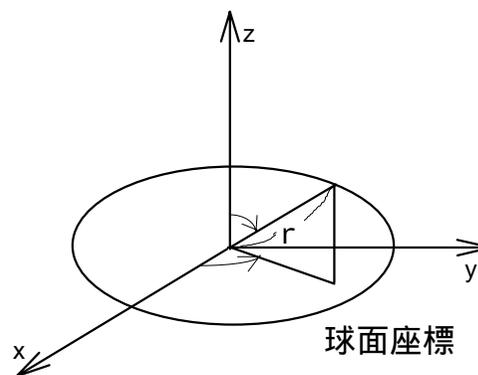
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

これらをまとめると $p = \rho r^2 \omega^2 / 2 - \rho g z + C$ となる。ただし C は積分定数である。さらに、 $r=0, z=z_0$ で $p=p_0$ という条件を課して



$$p = \frac{1}{2} \rho r^2 \omega^2 - \rho g z + (p_0 + \rho g z_0)$$

液体の表面は一つの等圧面だから、例えば、 $z=z_0$ を通る等圧面は上の式で $p=p_0$ と置き $z-z_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2$ となる。これは図のような放物面である。



§ 2 自転による地球の表面の形

理科 では、地球の形はほぼ楕円体であり、赤道半径は6378km、極半径は6357kmで扁平率は1/298であると教えるのであるが、これが § 1 の方法を適用するとどうなるか調べてみた。

角速度 ω で自転している流体の地球を考える。このモデルは地球が昔、灼熱の液体状態であったときを想定している。この場合、回転系で考えると下の図のように重力、遠心力、圧力勾配が釣り合っている。球面座標の基本ベクトル $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ とデカルト座標の基本ベクトル $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ との関係は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin\theta (\cos\varphi \hat{x} + \sin\varphi \hat{y}) + \cos\theta \hat{z} \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta (\cos\varphi \hat{x} + \sin\varphi \hat{y}) - \sin\theta \hat{z} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi \hat{x} + \cos\varphi \hat{y}\end{aligned}$$

これらを用いて、§ 1 の流体の釣り合いの式 を書き下す。

$$\nabla p = -G \frac{\rho M_E}{r^2} \vec{e}_r + \rho r \omega^2 \sin\theta (\sin\theta \vec{e}_r + \cos\theta \vec{e}_\theta)$$

ここで、 M_E は地球の質量、 ρ は地球の密度で今の場合一定とした。また、ここでは地球の変形による重力ポテンシャルの変化は無視した。したがって球からの変形が小さい場合のみ適用できる。変形が大きくなった場合、セルフコンシスタントに重力項と地球の形を求めなければならなくなり問題はかなり難しくなる。

軸対称性から $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ なので、 $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$ となり、これを に代入し、

両辺を比較して

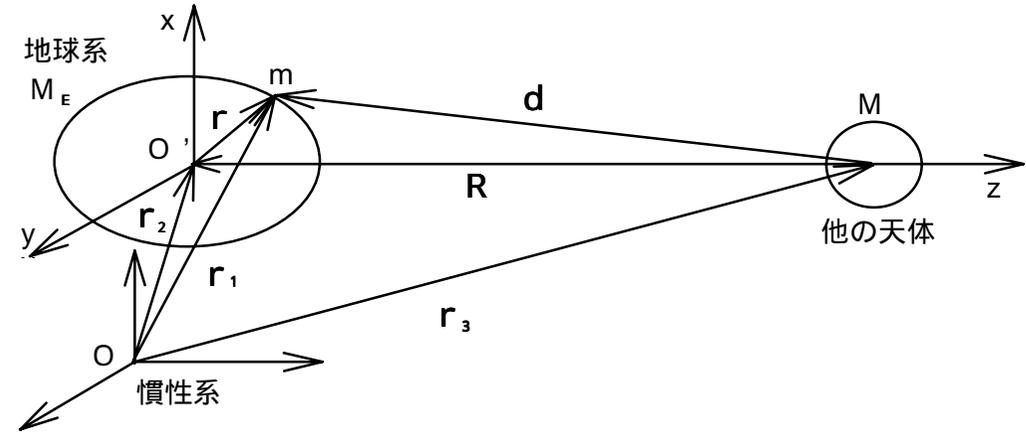
$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r} &= -G \frac{\rho M_E}{r^2} + \rho r \omega^2 \sin^2\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= \rho r \omega^2 \sin\theta \cdot \cos\theta\end{aligned}$$

より
$$p = G \frac{\rho M_E}{r} + \frac{\rho r \omega^2 \sin^2\theta}{2} + C_1(\theta)$$

より
$$p = \rho r^2 \omega^2 \int \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{\rho r^2 \omega^2 \sin^2\theta}{2} + C_2(r)$$

これらをまとめて

$$p = G \frac{\rho M_E}{r} + \frac{\rho r^2 \omega^2 \sin^2\theta}{2} + C_3$$



ただし、 C_3 は定数である。第 1 項は重力のポテンシャルであり、第 2 項は遠心力のポテンシャルである。 $\theta = 0$ (北極) で、 $r = r_0$ (極半径) で $p = p_0$ という条件を課すと

$$p = G \frac{\rho M_E}{r} + \frac{\rho r^2 \omega^2 \sin^2\theta}{2} + \left(p_0 - G \frac{\rho M_E}{r_0} \right)$$

等圧面は $p = p_0$ を代入して次のようになる。

$$0 = GM_E \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{r^2 \omega^2 \sin^2\theta}{2}$$

この式が地球の表面の形を陰関数 $f(r, \theta) = 0$ の形で与えてくれる。 r は r の 3 次方程式になるが、ここではこれを解かず、 $r = r_0 + h$ (ただし、 $r_0 \gg h$) として、緯度 $\left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ の地点における自転による変形 h を評価してみる。

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 \left(1 + \frac{h}{r_0} \right)} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{h}{r_0} + \left(\frac{h}{r_0} \right)^2 - \dots \right) \approx \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{h}{r_0} \right)$$

$$r^2 = (r_0 + h)^2 = r_0^2 \left(1 + \frac{h}{r_0} \right)^2 \approx r_0^2 \left(1 + 2 \frac{h}{r_0} \right)$$

重力 $GM_E m/r^2 \gg$ 遠心力 $mr\omega^2$ を仮定すると より

$$0 = GM_E \frac{(-h)}{r_0^2} + \frac{r_0^2 \omega^2 \sin^2\theta}{2}$$

$$\therefore h = \left(\frac{r_0^3 \omega^2 \sin^2 \theta}{2GM_E} \right) r_0$$

例えば赤道での h は、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 、 $r_0 = \text{極半径} = 6.67 \times 10^6 \text{m}$ 、 $\omega = \frac{2\pi}{(24 \times 3600)} = 7.27 \times 10^{-5} \text{rad/s}$ 、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ 、 $M_E = 5.98 \times 10^{24} \text{kg}$ を代入して $h = 10.8 \times 10^3 \text{m}$ と求めることができる。これは実際の赤道半径と極半径の差 $6378\text{km} - 6357\text{km} = 21\text{km}$ のほぼ0.5倍である。地球形成における複雑な過程を経て現在の形になったと考えられるが、オーダーはほぼ一致しているので、地球の形は自転の遠心力の影響を強く受けて決定されたものと思われる。

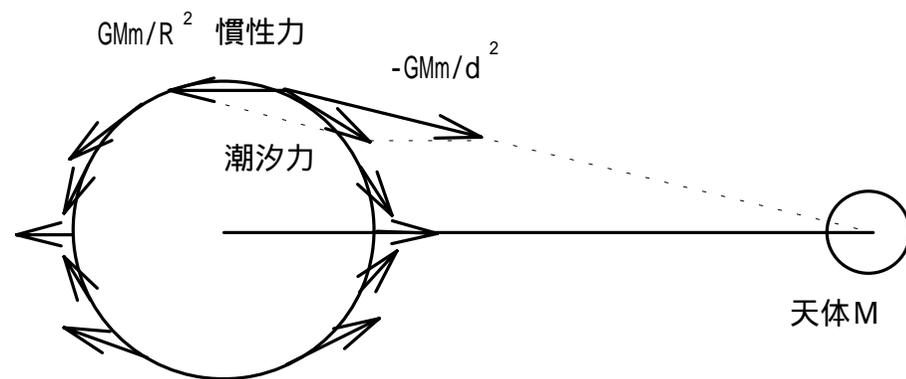
§3 潮汐力による海面の変形

一般に天体の近くに他の天体があると、お互いに潮汐力を及ぼし合う。地球の海は、月や太陽の影響で1日に2回の潮の干満を繰り返している。地球の海面の潮汐力による変形を §1 の方法で求めてみた。

前のページの図のような幾何学的配置を考え、地球上にある質点 m の地球に相対的な運動を考察する (文献1) 参照)。ここで O を慣性系 (例えば地球と他の天体との質量中心)、 O' を地球に固定した系とする。また、ここでは地球の自転は考えないこととする。 M_E を地球の質量、 M を他の天体の質量とし、 m を地球上の質点の質量とする。 O 系における m, M_E, M の位置ベクトルを $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ で表す。そしてこれらの質点間の相対的な位置ベクトルを $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ 、 $\vec{d} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3$ 、 $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3$ とする。 O 系での m, M_E の運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{GM_E m}{r^2} \hat{r} - \frac{GMm}{d^2} \hat{d}$$

$$M_E \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{GM M_E}{R^2} \hat{R}$$



ただし、 $\hat{r}, \hat{d}, \hat{R}$ はそれぞれ $\vec{r}, \vec{d}, \vec{R}$ 方向の単位ベクトルである。また、§2 と同様に地球の変形による重力の変化を無視し、 m に働く重力を $-GM_E m/r^2 \cdot \hat{r}$ とした。変形が地球の半径と比べ無視できないほど大きくなるような場合、例えば潮汐力による破壊 (Roche の問題) を扱う場合は、この近似を使うことはできない。(文献2) 参照)、より

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{GM_E}{r^2} \hat{r} - GM \left(\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} \right)$$

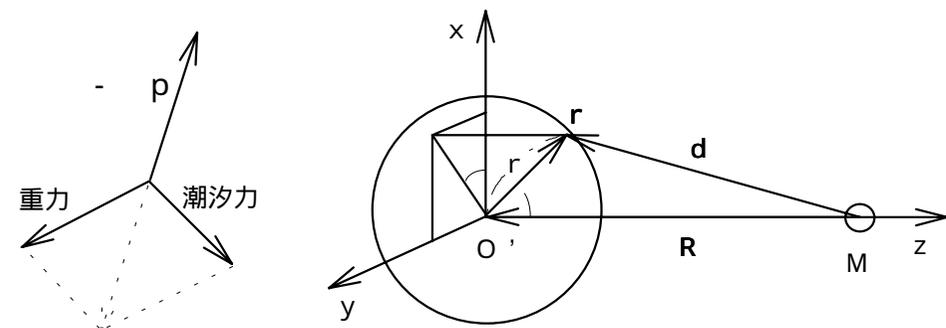
これが、地球に固定された系 O' から見た m の運動方程式である。第1項が地球から受ける重力で、第2項が潮汐力である。潮汐力は、天体 M が地球の中心に及ぼす引力と地球上の質量 m の位置に及ぼす引力の差であることがわかる。見方を変えれば、天体 M のまわりに円運動 (加速度運動) している地球から質量 m の物体を見れば、慣性力 $mGM \hat{R}/R^2$ が働くことになる。この慣性力と他の天体が質量 m の物体に及ぼす引力の合力が潮汐力であるといえる。

質量 m の物体の代わりに密度 ρ の流体の運動方程式を考える。

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p - G \frac{\rho M_E}{r^2} \vec{r} - G\rho M \left(\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} \right)$$

また、つり合いの条件は次のようになる。

$$\nabla p = -G \frac{\rho M_E}{r^2} \vec{r} - G\rho M \left(\frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{R}}{R^2} \right)$$



上の図のように、圧力勾配が地球からの引力と天体 M からの潮汐力の合力につり合っていることになる。上の図のように球面座標 r, θ, ϕ をとる。明らかに、 $\hat{r} = \vec{e}_r, \hat{R} = -\hat{z}$ である。また、

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r\sin\theta\cos\varphi\hat{x} + r\sin\theta\sin\varphi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}, \quad \hat{R} = -\hat{z}$$

であるから、 $\vec{d} = \vec{r} + \vec{R} = r\sin\theta\cos\varphi\hat{x} + r\sin\theta\sin\varphi\hat{y} + (r\cos\theta - R)\hat{z}$

これらを の右辺に代入して次のようになる。

$$\frac{\nabla p}{\rho} = -\frac{GM_E}{r^2}e_r - \frac{GM}{d^3}\{r\sin\theta(\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}) + (r\cos\theta - R)\hat{z}\} - \frac{GM}{R^2}\hat{z}$$

一方、§ 2 の , , から $\cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y} = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta, z = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$ となる。また、対称性から p は φ に依らないので $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$ である。これ

らを に代入して、両辺の $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ 成分を比較すると

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{GM_E}{r^2} - GM\frac{(r - R\cos\theta)}{d^3} - GM\frac{\cos\theta}{R^2}$$

$$\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = -\frac{GMR\sin\theta}{d^3} + \frac{GM\sin\theta}{R^2}$$

余弦定理の関係、 $d^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$ に留意し、また、 R が一定であることに注意して積分すると次の式を得る。

$$\text{より} \quad \frac{p}{\rho} = \frac{GM_E}{r} + \frac{GM}{d} - \frac{GM\cos\theta}{R^2}r + C_1(\theta)$$

$$\text{より} \quad \frac{p}{\rho} = \frac{GM}{d} - \frac{GM\cos\theta}{R^2}r + C_2(r)$$

これらをまとめて

$$\frac{p}{\rho} = \frac{GM_E}{r} + \frac{GM}{d} - \frac{GM\cos\theta}{R^2}r + C_3$$

の第 1 項は地球の引力によるポテンシャル、第 2 項は天体 M によるポテンシャル、第 3 項は地球が天体 M のまわりを公転することによる遠心力（慣性力）のポテンシャルである。 $\theta = \pi/2$ （北極）、 $r = r_0$ （極半径）で $p = p_0$ という条件を課して

$$\frac{p - p_0}{\rho} = GM_E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{GM}{R^2}r\cos\theta$$

$$+ GM\left\{\frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(r_0^2 + R^2)^{1/2}}\right\}$$

さらに $p = p_0$ を代入して

$$0 = GM_E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) + GM\left\{\frac{1}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta)^{1/2}} - \frac{1}{(r_0^2 + R^2)^{1/2}}\right\} - \frac{GM}{R^2}r\cos\theta$$

これが潮汐力の影響を受けたときの地球の海面の形を表す式である。

§ 2 と同様に r_0 を地球の極半径とし、 $r = r_0 + h$ ($r_0 \gg h$) として、公転面上 ($\theta = 0$) における海面のふくらみを求めてみる。より

$$0 = M_E\left(\frac{1}{r_0 + h} - \frac{1}{r_0}\right) + M\left\{\frac{1}{R - r_0 - h} - \frac{1}{(R^2 + r_0^2)^{1/2}} - \frac{r_0 + h}{R^2}\right\}$$

ここで $r_0 = 6.4 \times 10^3 \text{ km}$ であり、月と地球の間の平均距離は $3.8 \times 10^5 \text{ km}$ であるので、 $R \gg r_0$ と仮定してよい。 $\{ \}$ のなかを $r_0/R, (r_0 + h)/R$ でテーラー展開して $(r_0/R)^2$ のオーダーまで求めると次のようになる。

$$0 = M_E\frac{(-h)}{r_0^2} + M\left\{\frac{1}{R}\left(1 + \frac{r_0 + h}{R} + \frac{(r_0 + h)^2}{R^2}\right) - \frac{1}{R}\left(1 - \frac{r_0^2}{2R^2}\right) - \frac{r_0 + h}{R^2}\right\}$$

$$0 = M_E\frac{(-h)}{r_0^2} + M\left\{\frac{1}{R}\left(1 + \frac{r_0}{R} + \frac{r_0^2}{R^2}\right) - \frac{1}{R}\left(1 - \frac{r_0^2}{2R^2}\right) - \frac{r_0}{R^2}\right\} \quad (\because r \gg h)$$

$$0 = M_E\left(\frac{-h}{r_0^2}\right) + \frac{3}{2}\frac{r_0^2}{R^3}$$

$$\text{よって} \quad h = \left(\frac{3Mr_0^3}{2M_ER^3}\right)r_0$$

月の潮汐力による h の値 $M_E = 6.4 \times 10^{24} \text{ kg}$, $M = M_E/81$, $r = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$, $R = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$ を代入して、 $h = 0.57 \text{ m}$ と求まる。同様に、太陽の潮汐力による h の値は $M = 3.3 \times 10^5 M_E$, $R = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ を代入して 0.25 m となる。これから、太陽による潮汐力の影響は月のほぼ $1/2$ であることがわかる。さらに、太陽と月が一直線上に並ぶ満月や新月のとき効果が重なり、大潮となり、お互いに直角の位置にくる上弦や下弦の月のとき、打ち消し合い、干満の差の小さい小潮となることがわかる。

§ 4 おわりに

§ 1 の方法を適用し、自転や潮汐力による地球の表面の形や変形を求めてきた。地

球物理の専門書などにもこれらについて扱っているものもあるが、物理的に平易に記述しているものは少ないようである。本稿がわかりづらい潮汐力などの理解の一助となれば幸いである。また、地球の変形が大きくなった場合はこれからの課題である。

<文献>

- 1) バージャー・オルソン、「力学 新しい視点にたって」、培風館、1975