水ロケットと気体ロケット

―　断熱膨張の物理　―

県立三条高等学校　笹川民雄

１．はじめに

高校の物理の運動量保存の演示実験として水ロケットの実験は生徒に大変人気がある。また，水を入れずに空気だけで，この実験を行えば気体ロケットになり，さらに，容器を固定すれば断熱膨張の実験になる。

これらの現象の定量的なこと，例えば，容器につめる空気の圧力と飛距離の関係や，気体の断熱膨張におけるエネルギーの関係などは，理論的に明らかにされてこなかったように思われる。本稿ではこれらの問題について物理的考察の過程も含めて述べてみたい。

２．水ロケットの基本式の導出

水ロケットの水の噴出速度を求める。それには水鉄砲がヒントになる。注射器に水をつめ，ピストンを強く押せば水はより遠くに飛んで行く。つまり，噴出速度は加えられた圧力に関係しているのである。物理的には，圧力により水になされた仕事により水の運動エネルギーが増すのである。このことに気付くと水ロケットの問題は，水は縮まない流体なので比較的簡単に解ける。

問題を具体的に考えてみる。図１のように，断面積S_1，長さLの円柱に断面積Sの小さな噴出口のついた容器内に空気と密度ρの水が入っており，

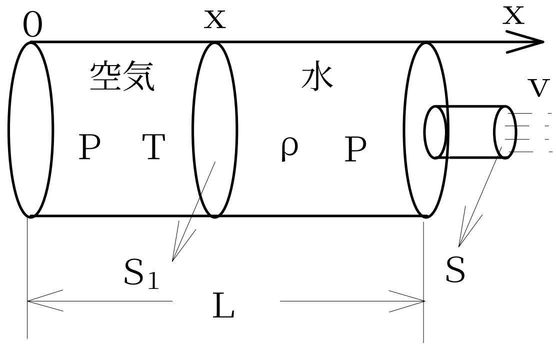

図１　　水ロケット

空気の圧力をP，温度をTとし，容器の外の大気の圧力をP_Aとする。さらに，ロケットに固定した座標をとり，容器内の水面の左端の位置をxとする。

まず，水の噴出速度vを求める。水は容器内の空気と大気から互いに逆方向に圧力を受けて仕事をされ，運動エネルギーを得るのであるから，仕事とエネルギーの関係から次の式が成り立つ。

$$P\Delta V - P_A \Delta V' = \frac{1}{2}\rho\,\Delta V' v^2$$

ここで，$\Delta V'$は噴出した水の体積であり，ΔVは容器内の水の減少した体積である。水は縮まない流体であるから$\Delta V = \Delta V'$が成り立つ。よって

$$v = \sqrt{\frac{2(P - P_A)}{\rho}} \qquad (2\text{-}1)$$

これは，定常状態におけるベルヌーイの定理

$$\frac{1}{2}0^2 + \frac{P}{\rho} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{P_A}{\rho}$$

からも導ける。厳密にいえば水の噴出過程は定常状態ではないが，それに準ずる状態(準定常状態)と考えられる。水の噴出速度は容器内外の圧力の差の平方根に比例することがわかった。

また，水の質量保存の式より，次の式を得る。

$$\rho S_1 \frac{dx}{dt} = \rho S v \qquad (2\text{-}2)$$

これは，いうまでもなく水の移動速度は断面積に反比例するということを表している。

容器内の水面が空気により押され移動するわけであるが，この現象は短時間で起こるので空気の膨張は断熱膨張であるとみなせる。よって

$$P(S_1 x)^\gamma = P_0 (S_1 x_0)^\gamma$$

が成り立つ。ここで，P_0, x_0はそれぞれP, xの初期値であり，γは比熱比C_P/C_Vで，２原子分子からなる空気の場合7/5である。この式より

$$P = P_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^\gamma \qquad (2\text{-}3)$$

を得る。

これで水ロケットの物理を記述する３つの式が得られた。これらの式から時間の関数として$v(t)$, $x(t), P(t)$を解けばよい。(2-3)を(2-1)に代入し

$$v=\sqrt{\frac{2}{\rho}\left\{P_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma}-P_A\right\}} \qquad (2\text{-}1')$$

これを(2-2)に代入して

$$\frac{dx}{dt}=\frac{S}{S_1}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left\{P_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\gamma}-P_A\right\}} \qquad (2\text{-}2')$$

この式はxに関する変数分離型の微分方程式であるが，$P_A=0$という真空中への噴射の場合以外は解析的な解はない。そこで，ルンゲ・クッタ法で数値計算して$x(t)$を求めることになる。その結果を代入して，(2-3)と(2-1')より，それぞれ$P(t)$, $v(t)$が求まる。

ロケットの運動を調べる前にこの現象をエネルギーの面からながめてみる。容器内の空気の内部エネルギー$U=nC_VT$（nは空気のモル数）がエネルギーの供給源であり，これが噴出流体の運動エネルギーと大気を押しのける仕事に変わるのであるから，次の式が成り立つ。

$$\frac{dU}{dt}=-\left(\frac{1}{2}\rho Sv^3+P_ASv\right)$$

右辺の第１項に(2-1)を代入し整理すると

$$\frac{dU}{dt}=-PSv\left(=-PS_1\frac{dx}{dt}\right)$$

となる。これは空気が水面にする仕事だけ内部エネルギーが減少することを示していて，熱力学の第１法則と矛盾しないことがわかる。また，上の式と(2-1), (2-2), (2-3)から容器内の空気の温度について$T=T_0(x_0/x)^{\gamma-1}$が得られ，よく知られた断熱変化の温度と体積の関係 $TV^{\gamma-1}$＝一定 と一致することも確かめられる。

３． 水ロケットの運動

水の噴出速度が求まったので，噴出する水だけから力を受けるロケットの運動を考える。ロケットの質量をM，地上の静止系からみたロケットの速度をV，ロケットに対する水の噴出速度をuとする。地上系でのロケットの運動方程式は$F=M\,dV/dt$である。ここで，Fは噴出した水からロケットが受ける力であり，作用反作用の法則により，水がロケットから受ける力に等しい。この力は水の１秒あたりの運動量変化に等しい。力はどの系からみても同じなので，ロケットとともに動く系からみると，この運動量変化は$\rho Su\cdot u=\rho Su^2$である。したがって，運動方程式は次のようになる。

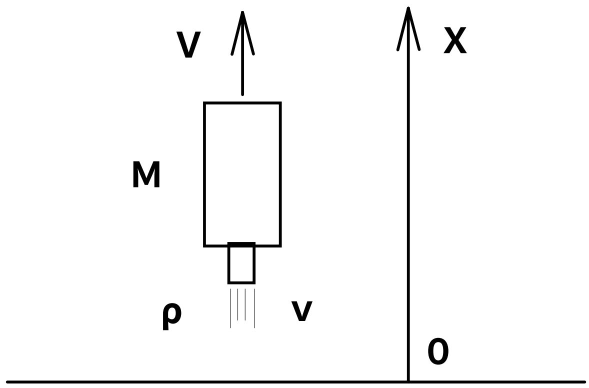

図２　ロケットの運動

$$M\frac{dV}{dt}=\rho Su^2$$

$dM/dt=-\rho Su$という関係に注意すると，上の式は$M\,dV/dt=-(dM/dt)u$という運動量保存から導かれるよく知られたロケットの運動を表す式になる。

興味があるのは鉛直上方に打ち上げられたロケットの運動であるので，図２のように鉛直上方にＸ軸をとり，ロケットに対する水の噴射速度をvとし，空気抵抗を無視すると運動方程式は次のように書ける。

$$M\frac{dV}{dt}=\rho Sv^2-Mg \qquad (3\text{-}1)$$

ここで，M_0を容器の質量とするとMは

$$M=M_0+\rho(L-x)S_1 \qquad (3\text{-}2)$$

となり，これを(3-1)に代入して次の式を得る。

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\rho Sv^2}{M_0+\rho(L-x)S_1}-g \qquad (3\text{-}1')$$

すでに$x(t), v(t)$が前節で与えられているので，(3-1')をルンゲ・クッタ法で数値計算することによりロケットの速度$V(t)$と位置$X(t)$が得られる。

資料１が使用したプログラムである。容器とし

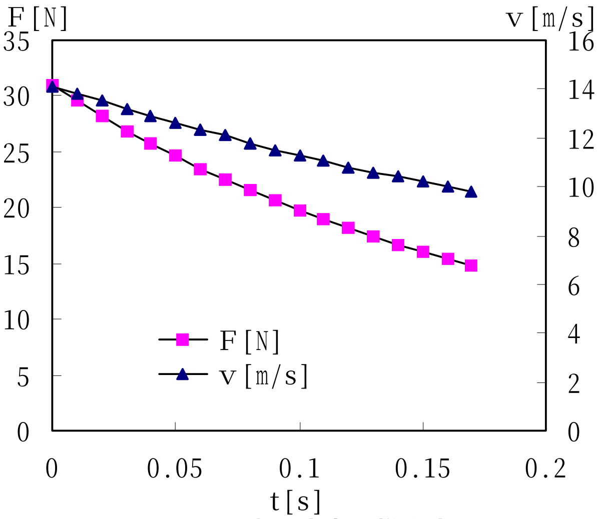

図３　噴出速度と推進力

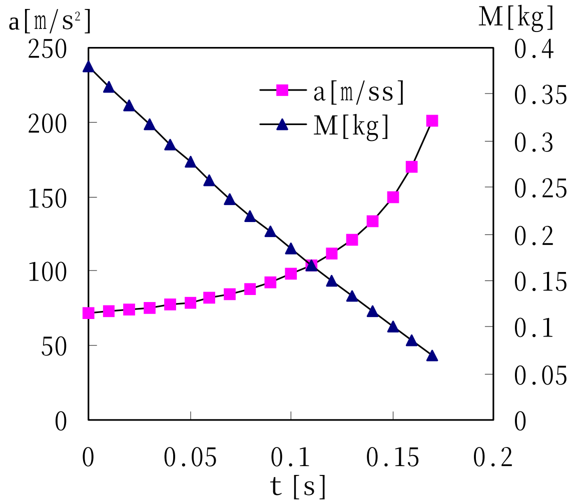

図４　ロケットの質量と加速度

て実際のペットボトルに近い半径4.5cm，長さ25cm，質量60gの円柱とした。また，噴出口の半径1.0cmとし，ペットボトルは出口に近づくにしたがって断面が狭くなるような形をしているので断面積として，実際の断面積の1/2の有効断面積を用いた。[1)] 初期条件として空気圧P_0，温度T_0をそれぞれ2.0atm(2.0×10^5N/m^2),300Kとし，今の例では容器の体積の1/5まで水をつめたものとした。

種々の物理量を数値計算した結果をグラフにまとめたものが図３，図４，図５，図６である。これらのグラフから次のようなことがわかる。第一に，約0.18秒という非常に短い時間に噴出は完了する。第二に，噴出速度が14m/sから10m/sに下がるにつれ，推進力は31Nから15Nに減少するが，同時にロケットの質量が水の噴出により380gから63gに激減するので加速度は逆に72m/s^2から222m/s^2に増加する。第三に，中の空気は圧力が1.4atmまで下がる間に温度は27℃から3℃まで急激に降下する。第四に，最初は噴出する水の運動エネルギーと，水が大気を押しのける仕事は等しく，徐々に後者の割合が大きくなる。

ロケットの$V-t, X-t$グラフが図７である。噴射終了時に高さ1.2mの地点で最高速度17m/sに達し，その後-9.8m/s^2の等加速度運動をするので，時刻1.9秒で最高点に達し，17mまで上がる。

次に，容器の体積に対する水の占める割合と最

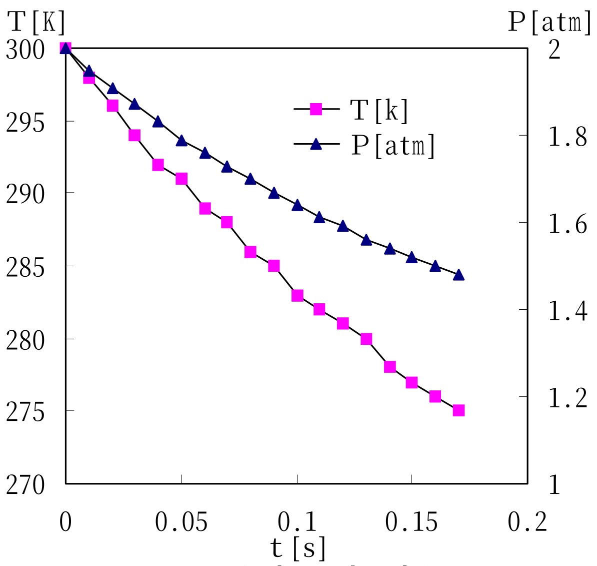

図５　温度と圧力の変化

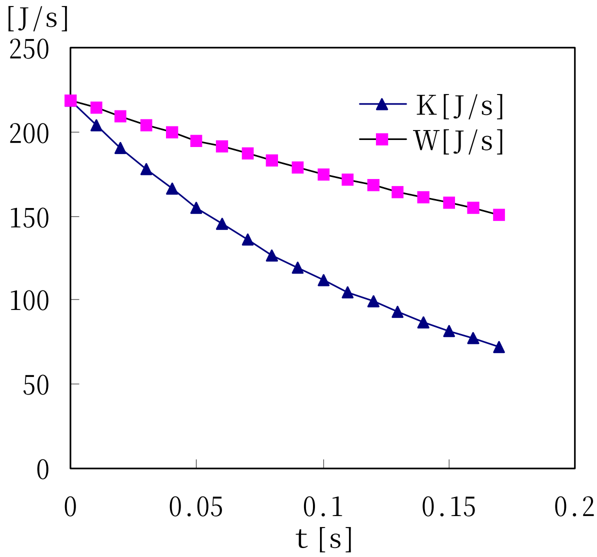

図６　運動エネルギーＫと大気を押しのける仕事Ｗ

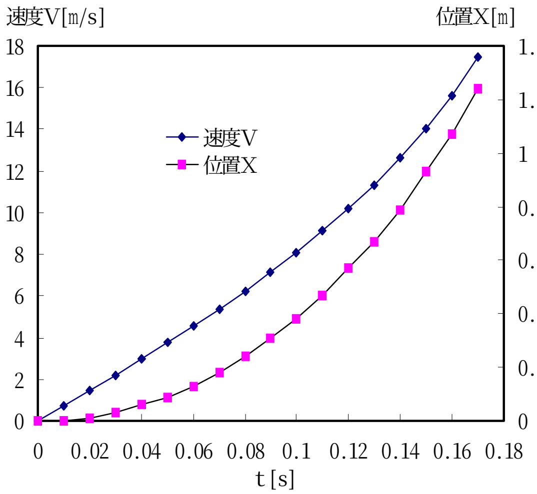

図7　水ロケットの運動

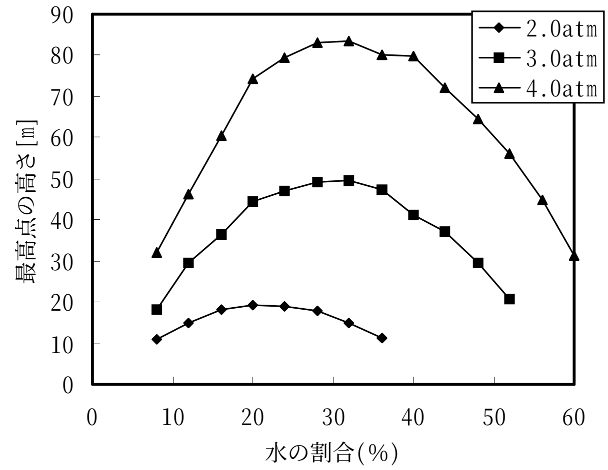

図８　水の割合（%）と最高点の高さ

高点の高さとの関係をグラフにしたものが図８である。初期の圧力は一定として，水の割合を変えた。水の量が多すぎるとロケットの慣性が大きくなり加速しにくくなるし，逆に少なすぎると噴出時間が短くなり得られる速度が小さくなることがわかる。初期の圧力によってもっとも高く上がる水の量が決まる。初期の圧力が2.0atmのこの例では水の体積が容器の約20%のときに最高点の高さが最大となった。初期の圧力が3.0atm，4.0atmと大きくなるにしたがって，この水の割合も30%くらいに大きくなることがわかる。

４．　圧縮流体のベルヌーイの定理

気体ロケットの場合，噴出速度が音速と同程度であり，流体の運動エネルギーが気体の内部エネルギーと同等の大きさとなり，温度変化が著しく現れる。このため内部エネルギーを含めたエネルギーと仕事の関係を考えなければならない。

図９のような定常状態にある流管を考える。１秒間に面Aから入る質量と面Bから出る質量が等しいので$\rho_A S_A v_A = \rho_B S_B v_B = m$（一定）が成り立つ。A，B面での単位質量あたりの内部エネルギーをE_A, E_Bとする。１秒間にA面から流入するエネルギーは$m\left(v_A{}^2/2 + E_A\right)$，B面から流出するエネルギーは$m\left(v_B{}^2/2 + E_B\right)$である。これらの差が１秒間に圧力からなされる仕事に等しいから

$$m\left(\frac{v_B{}^2}{2} + E_B\right) - m\left(\frac{v_A{}^2}{2} + E_A\right) = P_A S_A v_A - P_B S_B v_B$$

$P_A S_A v_A = P_A\, m/\rho_A$ ，$P_B S_B v_B = P_B\, m/\rho_B$

を代入すると

$$\frac{v_A{}^2}{2} + E_A + \frac{P_A}{\rho_A} = \frac{v_B{}^2}{2} + E_B + \frac{P_B}{\rho_B}$$

となる。よって流管のどの断面においても

$$\frac{v^2}{2} + E + \frac{P}{\rho} = 一定 \qquad (4\text{-}1)$$

が成り立つ。

ここで内部エネルギーについて考える。C_Vを定積モル比熱，m_0を気体のモル質量とすると$E = T\cdot(C_V/m_0)$である。マイヤーの関係$C_P - C_V = R$と比熱比$\gamma = C_P/C_V$より，$C_V = R/(\gamma-1)$であるので$E = RT/m_0(\gamma-1)$となる。さらに，気体の状態方程式$m_0 P = \rho RT$を用いて，$E = P/\rho(\gamma-1)$となる。これを(4-1)に代入して，次の式を得る。

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho} = 一定 \qquad (4\text{-}2)$$

これは圧縮流体におけるベルヌーイの定理と呼ばれるものである。なお，左辺の第２項は音速$c = \sqrt{\gamma P/\rho}$で表すと$c^2/(\gamma-1)$となる。

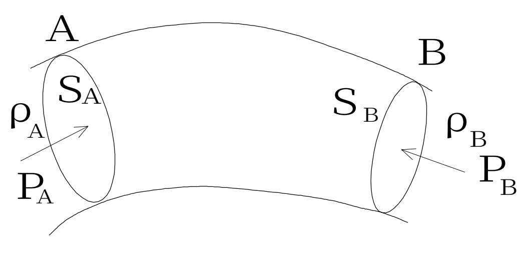

図９　圧縮性流体の定常流

５． 気体ロケットの基本式の導出

図１０のように，体積V_0の容器内の空気の圧力，密度，温度，モル数をそれぞれP,ρ,T,nとし，噴出口の断面積をS，噴出速度をvとする。また，噴出する空気の圧力を$P'(=P_A)$，密度をρ'とすると，圧縮流体のベルヌーイの定理より

$$\frac{1}{2}0^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}=\frac{1}{2}v^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_A}{\rho'}$$

これより，噴出速度は次のようになる。

$$v=\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{P}{\rho}-\frac{P_A}{\rho'}\right)} \qquad (5\text{-}1)$$

また，気体は流管に沿って断熱変化をするので

$$\frac{P}{\rho^{\gamma}}=\frac{P_A}{\rho'^{\gamma}}\therefore\ \rho'=\rho\left(\frac{P_A}{P}\right)^{1/\gamma} \qquad (5\text{-}2)$$

となる。これを(5-1)に代入して

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}\left\{1-\left(\frac{P_A}{P}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}} \qquad (5\text{-}1')$$

を得る。ベルヌーイの定理は厳密には，定常流に対して成り立つが，噴出口の断面積が容器の断面積に比べ小さい場合，噴出流は準定常状態にあると考えられるので，(5-1')を用いてもよいと思われる。

質量保存の式は次のように書ける。

$$V_0\frac{d\rho}{dt}=-\rho' Sv \qquad (5\text{-}3)$$

また，m_0を空気１モルあたりの質量とすると容器内の気体の状態方程式は

$$m_0P=\rho RT \qquad (5\text{-}4)$$

となる。

エネルギー保存の式は，容器内の空気の内部エネルギーが噴出気体の持ち出す内部エネルギーと噴出気体の運動エネルギー，それと噴出気体が大気を押しのける仕事に変わるので,次のように書ける。

$$\frac{d\left(nC_VT\right)}{dt}=-\left(\frac{\rho' Sv}{m_0}C_VT'+\frac{1}{2}\rho' S\mathrm{v}^3+P_AS\mathrm{v}\right)$$

ここで，T'は噴出気体の温度である。気体の状態方程式より$nT=V_0\,P/R$であるので，これを上の式に代入して

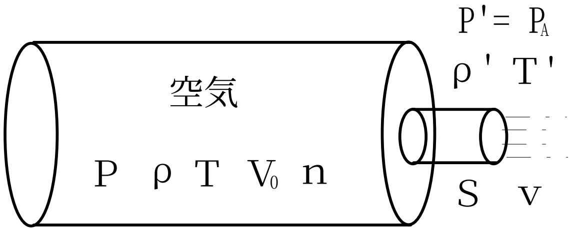

図１０ 気体ロケット

$$\frac{dP}{dt}=-\frac{RS}{C_VV_0}\left(\frac{\rho' v}{m_0}C_VT'+\frac{1}{2}\rho'\mathrm{v}^3+P_A\mathrm{v}\right)$$

(5-5)

を得る。

噴出気体の温度T'は次のように書ける。[2)]

$$T'=T\left\{1-\frac{(\gamma-1)}{2}\frac{v^2}{c^2}\right\} \qquad (5\text{-}6)$$

ここで，cは容器内の音速$\sqrt{\gamma P/\rho}=\sqrt{\gamma RT/m_0}$である。

(5-1')と(5-2)を(5-3)に代入して

$$\frac{d\rho}{dt}=-\frac{S}{V_0}\rho\left(\frac{P_A}{P}\right)^{1/\gamma}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}\left\{1-\left(\frac{P_A}{P}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}}$$

$$\equiv F(P,\rho) \qquad (5\text{-}3')$$

となる。(5-1'),(5-2),(5-6)より，v,ρ',T'はともにP,ρの関数であるから，(5-5)の右辺はP,ρの関数で，それを$G(P,\rho)$とおけば

$$\frac{dP}{dt}=G(P,\rho) \qquad (5\text{-}5')$$

となる。(5-3')と(5-5')の連立微分方程式をルンゲ・クッタ法で解いて$P(t),\rho(t)$が求まり，その後(5-1')，(5-4)より，それぞれ$v(t),T(t)$が求まる。

６． 気体ロケットの運動

鉛直に運動する気体ロケットを考える。ロケットの質量をM，ロケットに対する噴射気体の相対速度をvとすると，水ロケットの場合と同様に，

運動方程式は次のように書ける。

$$M\frac{dV}{dt}=\rho' Sv^2-Mg \qquad (6\text{-}1)$$

ここで，M_0を容器の質量とすると

$M=M_0+\rho V_0$

である。これを代入して

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\rho' Sv^2}{M_0+\rho V_0}-g \qquad (6\text{-}1')$$

となる。$\rho(t),\rho'(t),v(t)$がすでに前節**5**でわかるので，(6-1')をルンゲ・クッタ法で数値計算して，ロケットの速度$V(t)$と位置$X(t)$が求まる。

ここで，噴出速度が噴出口での音速（局所音速）を越える場合，噴出口での圧力について特別な扱いが必要なので，調べてみる。

単位面積を単位時間に通過する質量$j=\rho v$が流れに沿ってどのように変化するかみてみると，流速vが局所音速c_*に等しくなったときに最大値をとる。[3] 今扱っている気体ロケットの場合，ベルヌーイの定理を容器の中と $v=c_*$の点で適用して

$$\frac{1}{2}0^2+\frac{c^2}{\gamma-1}=\frac{1}{2}{c_*}^2+\frac{{c_*}^2}{\gamma-1}$$

これより，$c_*=c\sqrt{2/(\gamma+1)}$を得る。ここで，cは$\sqrt{\gamma P/\rho}$で，容器中の音速である。流速が局所音速と等しくなる点（$v=c_*$の点）,すなわち$j=\rho v$が最大値をとる点での温度，圧力，密度をそれぞれT_*,P_*,ρ_*とすると,これらは次のように表せる。

$$T_*=\frac{2T}{\gamma+1}=0.833T$$

$$P_*=P\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}=0.528P$$

$$\rho_*=\rho\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}=0.634\rho$$

空気は２原子分子気体であるので，γ=1.4とした。また，T,P,ρは容器中の気体についての量である。T_*,P_*,ρ_*は，それぞれ臨界温度，臨界圧力，臨界密度といわれる。[4]

次に，ペットボトルのような出口に向けて全体的に狭くなるノズルでは，流速は局所音速を越えられないことを示す。ノズルの中ほどの点で流速と局所音速が等しくなったとすると，その点で$j=$
ρvが最大値をとることになる。定常的な流れでは,
ρSvが一定である。よって，この点より出口に近い点では,すぼまるノズルのため，Sはより小さな値をとるので，$j=\rho v$はより大きな値になることになる。これはノズルの中ほどでjが最大値をとる仮定に矛盾する。よって，ノズルの中ほどで流
速が局所音速になることはないといえる。ノズルの端でしか，流速は局所音速と等しくなれないのである。また，これは，すぼまるノズルにおいて流速は局所音速を超えられないということを意味する。

気体ロケットの場合，容器内の圧力Pを大きくしていくと，噴射速度vもしだいに大きくなってくる。vが局所音速と等しくなった場合の気体ロケットの扱いを考える。このとき，噴出口の端での圧力は臨界圧力$P_*=0.528P$に等しい。この臨界圧力が大気圧1atmよりも大きくなる場合，すなわち，容器内の気体の圧力Pが1.89atmよりも大きい場合，噴射口の圧力はP_*であり，気体は大気中に出てから膨張し1atmになると考えられる。このように，容器中の圧力Pが1.89atmより大きい場合，噴出口での種々の物理量は次のような値を用いなければならない。

$$v=c_*=c\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}\cdot\frac{2}{\gamma+1}} \qquad (6\text{-}2)$$

$$\rho'=\rho_*=\rho\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} \qquad (6\text{-}3)$$

$$T'=T_*=\frac{2T}{\gamma+1}=\frac{2}{\gamma+1}\cdot\frac{m_0P}{\rho R} \qquad (6\text{-}4)$$

以上の式と前節５の気体の状態方程式(5-4)，質量保存の式(5-3)，エネルギー保存の式(5-5)を用い，ルンゲ・クッタ法で$P(t),\rho(t)$を解くことができる。また，(6-1')からロケットの速度$V(t)$，位置$X(t)$が計算される。

容器内の圧力Pの値により，場合分けしたプログラムが資料２である。また，数値計算した結果

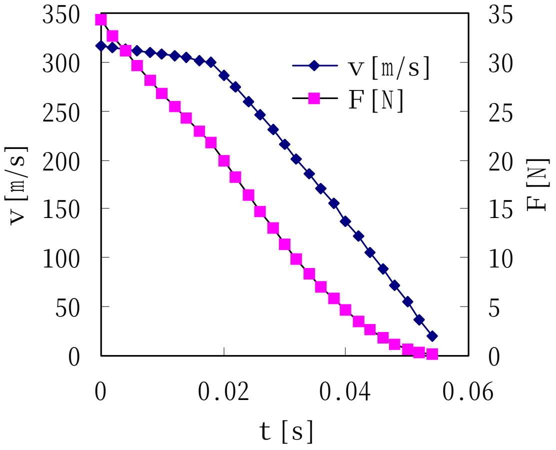

図１１　噴出速度と推進力の変化

をまとめたものが図１１～図１７である。容器は水ロケットと同じ半径4.5cm，長さ25cmで質量60gの円柱とし，噴出口の半径も1.0cmとした。初期の容器中の空気圧は3.0atmとした。

図１１より，噴出に要する時間が0.054秒と極めて短いことがわかる。容器内の圧力が1.89atmより大きい場合（臨界圧力が大気圧１atmより大きい場合），噴射速度は，噴出口の局所音速と等しく，約300m/sで，以後急速に減少していく。気体は噴出速度vは大きいが密度ρ'が小さいので，推進力$F=\rho' S v^2$の大きさは，初めの値は34Nであり，水ロケットの場合とほぼ同程度である。

気体ロケットは，気体の質量はわずかで,ロケット全体の質量はほぼ容器の質量60gと等しく，水ロケットの場合と比べ小さい。そのため，図１２からわかるように，初期の加速度は515m/s^{2}で水ロケットの約７倍である。しかし，気体の噴出にしたがって時間とともに急速に減少する。

容器内の空気の圧力と温度の変化図１３で特徴的なことは温度が300[K](27℃)から223[K](-50℃)まで，急激に降下することである。注目すべ点は，図１４から，わかるように初期においては噴出気体が運び去る内部エネルギーUが大気を押しのける仕事Wおよび流体の運動エネルギーKに消費されるエネルギーよりも約４倍大きいことである。このため準静的な断熱膨張の場合と比較して，より大きな温度降下を生ずるのである。この意味で，

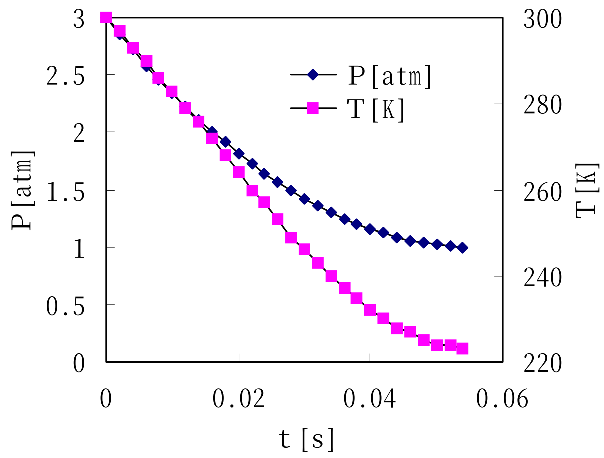

図１３　容器内の圧力と温度の変化

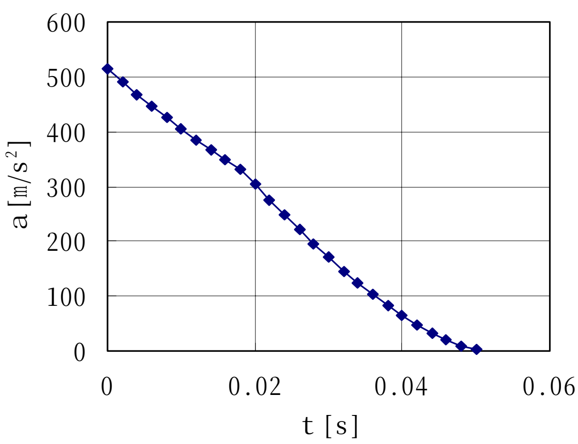

図１２　ロケットの加速度の変化

気体の噴出を伴う断熱膨張は”動的な断熱膨張”であるといえる。

図１５から次のことがわかる。噴出口での噴出気体の温度は，最初にすでに250[K](-23℃)であり，容器内の気体の温度300[K](27℃)よりも低い。また，温度，密度とも，臨界圧力P_*が1atmになるまでは（t<0.018秒の間），時間にほぼ比例して下がり，その後噴出口での気体の圧力が１atmに等しくなると以後一定の値をとる。

図１６はロケットの$X-t, V-t$グラフである。高さ0.45mという低い地点で噴出は終了し，そのときのロケットの速度は12m/sである。また，最高点の高さは7.7mであった。水ロケットの場合，初期の圧力が2.0atmでも最高点の高さは17mであったので，一般的に，気体ロケットは水ロケットに比べ飛びにくいといえる。

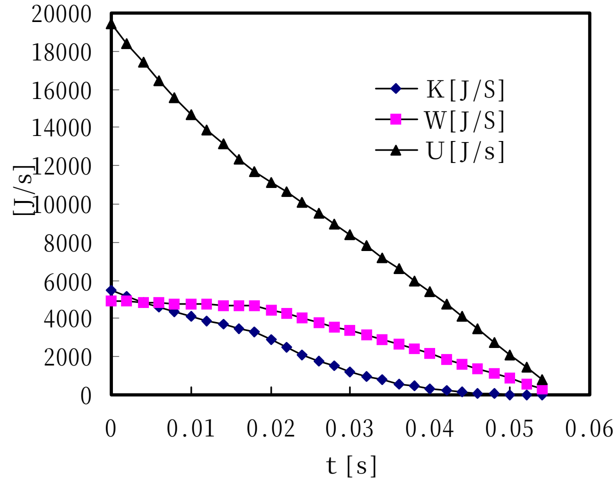

図１４　運動エネルギーＫと大気を押しのける仕事Ｗと噴出気体の持ち去る内部エネルギーＵ

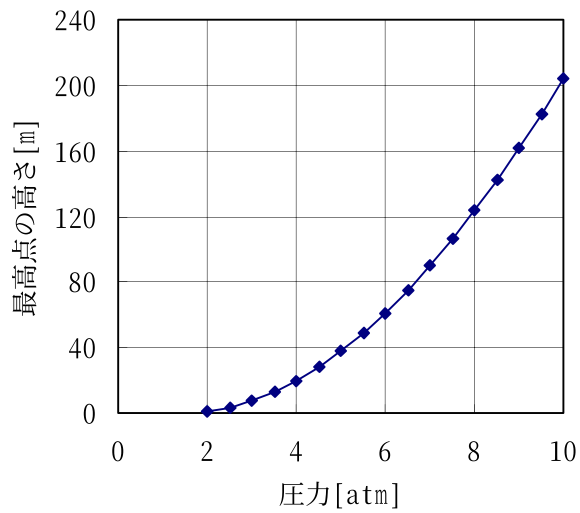

図１７　初期圧力と最高点の高さ

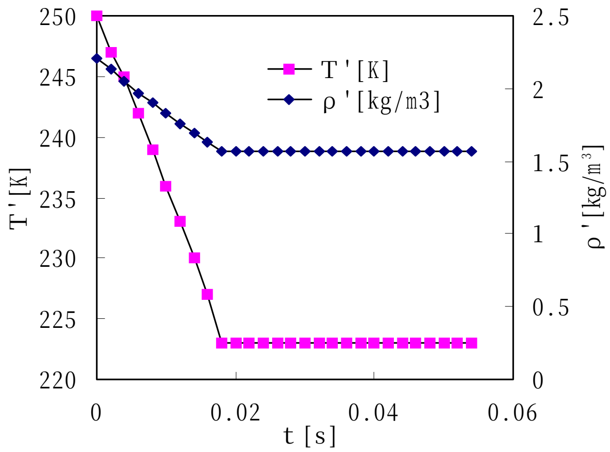

図１５　噴出気体の密度と温度

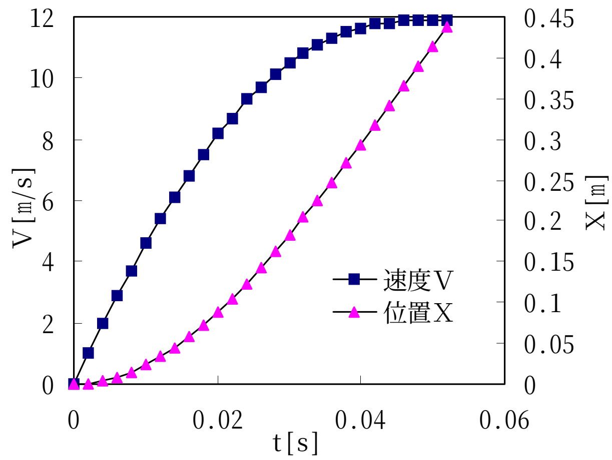

図１６　気体ロケットの運動

図１７は気体ロケットの容器内の空気の初期圧力と最高点の高さの関係を示したものである。3.0atmのときは7.7mでも，圧力とともに急激に最高点の高さが増すことがわかる。6.0atmでは61mまで上がる。もっとも，ペットボトルは強度的に6.0〜8.0atm程度が限界であると思われる。

７．まとめ

水ロケットと気体ロケットについて理論的に定式化して調べることができた。噴出口が十分小さく，噴出が準定常的であるとして，ベルヌーイの定理を用いて水や気体の噴出速度を導いた。また，これらの現象は気体の断熱膨張にも深く関わるものであるが，断熱膨張には水ロケットのときのような準静的なものと，気体ロケットのときのような気体の噴出を伴う動的なものがあることがわかった。そして，”動的な断熱膨張”の場合，大気を押しのける仕事や噴出気体の運動エネルギー以上に噴出気体自身が持ち去る内部エネルギーが大きな値をとることがわかった。

水ロケットと気体ロケットの飛距離に関していえば，初期圧を共通にした場合，水ロケットの方が軍配が上がる。これは，水の密度が空気と比べ大きいことが原因であると思われる。水ロケットでは噴出速度が小さくとも，密度が大きいので噴出流体は気体ロケットと同程度の運動量を得る。しかも，噴出速度が小さいので気体ロケットと比べ，長時間噴出が継続するのである。ただし，水ロケットも水をつめすぎると，慣性が大きくなり，飛距離が小さくなることが容易にわかる。また，

水の替わりに密度の大きい水銀などをつめた場合も慣性が大きくなり飛距離が小さくなることも数値計算で確認された。

参考文献

1) 谷一郎：流れ学（岩波書店）P.34

2) ランダウ・リフシッツ：流体力学２(東京図書)P.361

3) ランダウ・リフシッツ：流体力学２(東京図書)P.396

4) ランダウ・リフシッツ：流体力学２(東京図書)P.392

資料１　　　水ロケットの数値計算プログラム

```
100 '**********************************
110 '  SAVE "B:WROCKET.BAS",A
120 '  水ロケットの運動 （大気圧中の噴射）
130 '  1994.7.7 BY SASAGAWA
140 '**********************************
150 CLS 3:SCREEN 3,0,0,1:CONSOLE 0,25,0,1
160 '---------------------------------
170 S=.00031/2    '有効噴出口断面積
180 S1=.0064       '容器断面積
190 P0=200000!    '容器内の初期の空気の圧力
200 PA=100000!    '大気圧
210 M0=.06         '容器の質量
220 L=.25          '容器の長さ
230 X0=.2          '容器中の初期の水の位置
240 H=1.4          '空気の比熱比
250 ROW=1000       '水の密度
260 T0=300         '初めの気体の温度
270 DEF FNA(X)=S/S1*SQR( 2/ROW *( P0*(X0/X)^H-PA ) )
280 DEF FNB(X)=2*S*(P0*( X0/X )^H-PA)/(M0+ROW*S1*(L-X))-
9.8  'ロケットの加速度
290 '---------------------------------
300 T=0 :X=X0:DIM X(5000!)
310 DT=.0002
320  PRINT        "時刻     水の位置  噴出速度    圧力
力      質量     加速度
 温度  水の運動エネ／秒 大気を押しのける仕事率"
330  PRINT        "[s]        [m]       [m/s]     [N/mm]
[N]     [Kg]    [m/ss]
 [K]        [J/s]               [J/s]"
340 WHILE ( X<=L )
350
V=S1/S*FNA(X) :P=P0*( X0/X )^H :F=ROW*S*V^2 :M=M0+ROW*S1*
(L-X) :A=F/M-9.8
360   X(I)=X
370  PRINT USING "t=#.###  x=#.###  v=##.#   P=######
F=##.#  M=#.### A=###.#
ONDO=###   K=###.#           W=###.#
";T,X,V,P,F,M,A,300*(X0/X)^.4,(P-PA)*S*V,PA*
S*V
390   K1=DT*FNA(X)
400   K2=DT*FNA(X+K1/2)
410   K3=DT*FNA(X+K2/2)
420   K4=DT*FNA(X+K3)
430   K=( K1+2*(K2+K3)+K4 )/6
440   T=T+DT: X=X+K ':VR=VR+A*DT :XR=XR+VR*DT:PRINT
VR ,XR
450   I=I+1
460 WEND :TT=T-DT:IF TT/DT MOD 2<>0 THEN TT=TT-DT
470 '------------------------------
480 T=0:XR=0:VR=0:DT=DT*2
490 PRINT        " 時間     ロケットの速度  ロケットの位置"
500 PRINT        " [s]          [m/s]            [m]        "
510 WHILE (T<=TT)
520   N=T/(DT/2) :IF X(N+2)=0 THEN 620
530   PRINT USING "t=#.###     VR=###.##       XR=###.##
";T,VR,XR
540   K1=DT*FNB( X(N) )       :L1=DT*VR
550   K2=DT*FNB( X(N+1) )     :L2=DT*(VR+K1/2)
560   K3=DT*FNB( X(N+1) )     :L3=DT*(VR+K2/2)
570   K4=DT*FNB( X(N+2) )     :L4=DT*(VR+K3)
580   K=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6 :LL=(L1+2*L2+2*L3+L4)/6
590   VR=VR+K:XR=XR+LL
600   T=T+DT
610 WEND
620 PRINT USING "最高点の時間###.##秒   水の割合###%  最
高点の高さ###.#m";T+VR/9
.8,(L-X0)/L*100,XR+VR^2/19.6
630 STOP
640 '--------------------------
650   FOR T=TT TO 2.5 STEP .05
660     V=VR-9.8*(T-TT):X=XR+VR*(T-TT)-.5*9.8*(T-TT)^2
670    PRINT USING "t=#.###     VR=##.##
XR=##.##";T,V,X
680     IF V<0 THEN 700
690   NEXT T
700 END
```

資料２　気体ロケットの数値計算プログラム

```
100 '***************************
110 'SAVE "B:GROCKET.BAS",A
120 '圧縮性気体  P'=P* 臨界圧力 --->P'=PA
130 '94.11.1  BY SASAGAWA
140 '***************************
150 CLS 3:SCREEN 3,0,0,1:CONSOLE 0,25,0,1
160 '-------------------------
170 S=.00031/2           '噴出口の面積
180 V0=.0064*.25         '容器の体積
190 H=1.4                '比熱比
200 M0=.06               '容器の質量
210 PA=100000!           '大気圧
220 P0=300000!           '容器の初期の圧力
230 T0=300               '容器中の気体初期の温度
240 MA=29*.001           '空気１ｍｏｌの質量
250 CV=8.31*5/2          '空気の定積モル比熱
260 R0=MA*P0/( 8.31*T0)'容器中の気体の初期の密度
270 DEF FNR(P,R)=R*(2/(H+1))^(1/(H-1))
280 DEF FNV(P,R)=SQR( 2*H*P/(R*(1+H)) )
290 DEF FNA(P,R)=-(S/V0)*FNR(P,R)*FNV(P,R)
300 DEF FNT(P,R)=MA*P/(R*8.31)*2/(H+1)        '  T'
310 DEF FNB(P,R)=-
S/(2.5*V0)*( FNR(P,R)*FNV(P,R)*CV*FNT(P,R)/MA+.5*FNR(P,R)
*FNV(
P,R)^3+PA*FNV(P,R) )
320 'DEF FNC(P,R)=FNR(P,R)*S*FNV(P,R)^2/(M0+R*V0)
330 '---------------------------
340 T=0 :DIM R(1000):DIM P(1000):DIM V(1000):DIM RR(1000)
350 P=P0:R=R0
360 DT=.0002
370  PRINT        " 時間  気体密度  噴流密度   圧力   噴出
速度  容器中の温度 容気
中の音速   噴出気体の温度  局所音速 "
380  PRINT        " [s]   [Kg/mmm]  [Kg/mmm]   [N/mm]
[m/s]       [K]            [
m/s]          [K]            [m/s]      "
390 WHILE ( .528*P>=100000! )
400  PRINT USING "t=#.#### R=#.##   R'=#.##  P=######
V=###   ONDO=###      ONSO
KU=###     HONDO=###         KYON=###
";T,R,FNR(P,R),P,FNV(P,R), MA*P/(R*8.31),SQR(
 H*P/R ),FNT(P,R),SQR ( H*8.31*FNT(P,R)/MA )
410    P(I)=P:R(I)=R:V(I)=FNV(P,R):RR(I)=FNR(P,R)
420    K1=DT*FNA(P,R)            :L1=DT*FNB(P,R)
430    K2=DT*FNA(P+L1/2,R+K1/2):L2=DT*FNB(P+L1/2,R+K1/2)
440    K3=DT*FNA(P+L2/2,R+K2/2):L3=DT*FNB(P+L2/2,R+K2/2)
450    K4=DT*FNA(P+L3,R+K3)     :L4=DT*FNB(P+L3,R+K3)
460    K=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6    :L=(L1+2*L2+2*L3+L4)/6
470    R=R+K: P=P+L
480    T=T+DT : I=I+1
490  WEND
500 PRINT
510 STOP
520 '---------------------------
530 DEF FNR(P,R)=R*(PA/P)^(1/H)
540 DEF FNV(P,R)=SQR( 2*H/(H-1)*(P/R)*(1-(PA/P)^((H-
1)/H) ) )
550 DEF FNA(P,R)=-(S/V0)*FNR(P,R)*FNV(P,R)
560 DEF FNT(P,R)=MA*P/(R*8.31)*( 1-(H-
1)/2*FNV(P,R)^2*R/(H*P) )
570 DEF FNB(P,R)=-
S/(2.5*V0)*( FNR(P,R)*FNV(P,R)*CV*FNT(P,R)/MA+.5*FNR(P,R)
*FNV(
P,R)^3+PA*FNV(P,R) )
580 DEF FNC(R,RR,V)=RR*S*V^2/(M0+R*V0)-9.8
590 '-----------------------------
600 WHILE ( P>PA+200)
610  'PRINT 1-(PA/P)^( (H-1)/H )
620  IF 1-(PA/P)^( (H-1)/H ) <=.0002 THEN 730
630  PRINT USING "t=#.#### R=#.##   R'=#.##  P=######
V=###   ONDO=###      ONSO
KU=###     HONDO=###         KYON=###
";T,R,FNR(P,R),P,FNV(P,R), MA*P/(R*8.31),SQR(
 H*P/R ),FNT(P,R),SQR ( H*8.31*FNT(P,R)/MA )
640    P(I)=P:R(I)=R:V(I)=FNV(P,R):RR(I)=FNR(P,R)
650    K1=DT*FNA(P,R)            :L1=DT*FNB(P,R)
660    K2=DT*FNA(P+L1/2,R+K1/2):L2=DT*FNB(P+L1/2,R+K1/2)
670    K3=DT*FNA(P+L2/2,R+K2/2):L3=DT*FNB(P+L2/2,R+K2/2)
680    K4=DT*FNA(P+L3,R+K3)     :L4=DT*FNB(P+L3,R+K3)
690    K=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6    :L=(L1+2*L2+2*L3+L4)/6
700    R=R+K: P=P+L
710    T=T+DT : I=I+1
720  WEND
730  STOP
740  TT=T-DT:IF TT/DT MOD 2<>0 THEN TT=TT-DT
750 '------------------------------
760 T=0:XR=0 :VR=0 :DT=2*DT
770     PRINT
780     PRINT       "時間    ロケットの速度  ロケットの位
置"
790     PRINT       "[s]         [m/s]             [m] "
800 WHILE (T<=TT)
810     N=T/(DT/2)
820     IF 1-(PA/P(N+2))^((H-1)/H) <=0 THEN 920
830     PRINT USING "t=#.#### VR=###.#        XR=###.###
";T,VR,XR
840     K1=DT*FNC( R(N),RR(N),V(N) ) :L1=DT*VR
850
K2=DT*FNC( R(N+1),RR(N+1),V(N+1) )  :L2=DT*(VR+K1/2)
860
K3=DT*FNC( R(N+1),RR(N+1),V(N+1) )  :L3=DT*(VR+K2/2)
870     K4=DT*FNC( R(N+2),RR(N+2),V(N+2) )  :L4=DT*(VR+K3)
880     KK=(K1+2*K2+2*K3+K4)/6  : LL=(L1+2*L2+2*L3+L4)/6
890     VR=VR+KK:XR=XR+LL
900     T=T+DT
910 WEND
920 PRINT USING "最高点の時間##.##秒      最高点の高さ
###.#m";T+VR/9.8,XR+VR^2/19
.6
930 END
```